nuclear fusion

URNAL OF PLASMA PHYSICS AND THERMONUCLEAR FUSION

fusion nucléaire

URNAL DE PHYSIQUE DES PLASMAS ET FUSION THERMONUCLEAIRE

ядерный синтез

РНАЛ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ И ТЕРМОЯДЕРНОМУ СИНТЕЗУ

fusión nuclear

VISTA DE FISICA DEL PLASMA Y FUSION TERMONUCLEAR

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY - VIENNA 1961
AGENCE INTERNATIONALE DE L'ENERGIE ATOMIQUE - VIENNE 1961
МЕЖДУНАРОДНОЕ АГЕНТСТВО ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ - ВЕНА 1961 г.
ORGANISMO INTERNACIONAL DE ENERGIA ATOMICA - VIENA 1961

5-22-61
m-e

VOLUME - TOM - VOLUMEN 1 • NUMBER - ВЫПУСК - NUMERO 2

PROPERTY OF
LABORATORIES FOR APPLIED SCIENCES

The following States are Members of the International Atomic Energy Agency

Afghanistan
Albania
Argentina
Australia
Austria

Belgium
Brazil
Bulgaria
Burma
Byelorussian Soviet Socialist Republic

Cambodia
Canada
Ceylon
China
Chile
Cuba
Colombia
Czechoslovak Socialist Republic

Denmark
Dominican Republic

Ecuador
El Salvador
Ethiopia

Finland
France
Federal Republic of Germany

Ghana
Greece
Guatemala

Haiti
Holy See
Honduras
Hungary

Iceland
India
Indonesia
Iran
Iraq
Israel
Italy

Japan

Republic of Korea

Luxemburg

Mali
Mexico
Monaco
Morocco

Netherlands
New Zealand
Nicaragua
Norway

Pakistan
Paraguay
Peru
Philippines
Poland
Portugal

Romania

Salvador
Senegal
Spain
Sudan
Sweden
Switzerland

Thailand
Tunisia
Turkey

Ukrainian Soviet Socialist Republic
Union of South Africa
Union of Soviet Socialist Republics
United Arab Republic
United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland
United States of America

Venezuela
Viet-Nam

Yugoslavia

NUCLEAR FUSION, *Journal of Plasma Physics and Thermonuclear Fusion*, is a quarterly international scientific journal published by the International Atomic Energy Agency. The journal contains reports of original work and review articles concerning plasma physics and controlled thermonuclear fusion research. For information on manuscript preparation and similar matters see inside of back cover. Subscription rates are printed on the outside of the back cover. Inquiries should be addressed to "The Editor, NUCLEAR FUSION, International Atomic Energy Agency, Vienna I, Austria".

FUSION NUCLEAIRE, *Journal de physique des plasmas et fusion thermonucléaire*, est une publication scientifique internationale éditée tous les trimestres par l'Agence internationale de l'énergie atomique. Cette revue contient des rapports sur des travaux de recherche inédits et des études générales concernant la physique des plasmas et la recherche en matière de fusion thermonucléaire contrôlée. Pour tous renseignements sur la préparation des manuscrits et autres questions analogues, consulter la face interne du feuillet de couverture, à la fin de la revue. Les tarifs d'abonnement figurent au verso. Les demandes de renseignements doivent être adressées au «Rédacteur en chef, FUSION NUCLEAIRE, Agence internationale de l'énergie atomique, Vienne I, Autriche».

ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ, *Журнал по физике плазмы и термоядерному синтезу*, — ежеквартальный международный научный журнал, издаваемый Международным агентством по атомной энергии. В журнале публикуются отчеты об оригинальных работах и обзорные статьи, посвященные вопросам исследований в области физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза. Информация о подготовке рукописи и по аналогичным вопросам приведена на обороте обложки. Подписная цена указана на внешней стороне обложки. За справками обращаться по адресу: «Редактору журнала ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ, Международное агентство по атомной энергии, Вена I, Австрия».

FUSION NUCLEAR, *Revista de física del plasma y fusión termonuclear*, es una publicación científica internacional editada trimestralmente por el Organismo Internacional de Energía Atómica. La revista contiene informes sobre trabajos originales y reseñas de investigaciones sobre física del plasma y fusión termonuclear controlada. En la contracubierta interna figuran normas para la preparación de los manuscritos, etc. y en la externa se indican los precios de suscripción. La correspondencia debe dirigirse al «Redactor de la revista FUSION NUCLEAR, Organismo Internacional de Energía Atómica, Viena I, Austria».

Permission to reproduce or translate the information contained in this publication may be obtained by writing to the International Atomic Energy Agency, Kärntner Ring 11, Vienna, Austria

© IAEA, 1961

Published by the International Atomic Energy Agency · Printed by Globus, Druck- und Verlagsanstalt, Vienna

NUCLEAR FUSION
FUSION NUCLEAIRE
ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ
FUSION NUCLEAR

VOLUME 1 NO. 2
MARCH – 1961 – МАРТ
ТОМ 1 ВЫП. 2

CONTENTS – SOMMAIRE – СОДЕРЖАНИЕ – INDICE

Conferences — Conférences — Конференции — Conferencias

H. S. GREEN: Statistical thermodynamics of plasmas 69
J. G. LINHART: A simplified analysis of the dynamics of plasma guns 78
А. А. ВЕДЕНОВ, Е. П. ВЕЛИХОВ, Р. З. САГДЕЕВ: Нелинейные колебания разреженной плазмы (I) 82
N. ROSTOKER: Fluctuations of plasmas (I) 101
C. MERCIER et M. COTSAFTIS: Equilibre et stabilité d'un plasma en symétrie de révolution avec pression anisotrope 121
B. LEHNERT: Voltage characteristics of a rotating plasma 125
R. J. MACKIN, Jr.: Plasma accumulation in a device fed by energetic-ion trapping 131
H. A. B. BODIN, A. A. NEWTON and N. J. PEACOCK: The damping of Rayleigh-Taylor instabilities in a thetatron discharge 139
Abstracts in English 145
Résumés en français 147
Аннотации по-русски 149
Resúmenes en español 151
Errata et Addenda (Vol. 1, No. 1) 153
Translations — Traductions — Переводы — Traducciones 154

NTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY · AGENCE INTERNATIONALE
E L'ENERGIE ATOMIQUE · МЕЖДУНАРОДНОЕ АГЕНТСТВО ПО АТОМНОЙ
ЭНЕРГИИ · ORGANISMO INTERNACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

Board of Editors — Comité de rédaction — Редакционная коллегия — Consejo de redacción

Dr. K. W. ALLEN (К. У. Аллен)
United Kingdom Atomic Energy Authority, Aldermaston,
Berkshire, England

Prof. Dr. L. BIERMANN (Л. Бирман)
Max-Plank-Institut für Physik und Astrophysik, München,
Federal Republic of Germany

Dr. S. A. COLGATE (С. А. Колгейт)
University of California, Lawrence Radiation Laboratory,
Livermore, California, U.S.A.

Dr. W. F. GAUSTER (У. Ф. Гаустер)
Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, U.S.A.

Prof. Koji HUSIMI (К. Хусими)
Osaka University, Osaka, Japan

Проф. д-р И. Ф. КВАРЦХАВА (I. F. Kvartskhava)
Физико-технический институт
Академии Наук Грузинской ССР,
Сухуми, СССР

Dr. B. LEHNERT (Б. Ленерт)
The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden

Dr. J. G. LINHART (Дж. Г. Линхарт)
Association Euratom-Comitato Nazionale per le Richerche
Nucleari, Laboratorio Gas Ionizzati, Rome, Italy

Prof. Dr. Elmér NAGY (Е. Надь)
Lorand Eötvös University, Budapest, Hungary

Prof. Dr. J. NOWACKI (П. И. НОВАЦКИ)
Institute of Nuclear Research, Warsaw, Poland

Проф. д-р В. Д. ШАФРАНОВ (V. D. Shafranov)
Институт атомной энергии имени
И. В. Курчатова Академии Наук СССР,
Москва, СССР

Prof. Lyman SPITZER, Jr. (Л. Спицер)
Project Matterhorn, Princeton University, Princeton,
New Jersey, U.S.A.

Dr. P. C. THONEMANN (П. С. Тонеман)
United Kingdom Atomic Energy Research Establishment,
Harwell, Berkshire, England

Dr. J. L. TUCK (Дж. Л. Так)
University of California, Los Alamos Scientific Laboratory,
Los Alamos, New Mexico, U.S.A.

Dr. G. VENDRYES (Ж. Вндрис)
Commissariat à l'Energie Atomique, Fontenay-aux-Roses,
Seine, France

Prof. C. N. WATSON-MUNRO (С. Н. Уотсон-Манро)
University of Sydney,
Sydney, New South Wales, Australia

Проф. д-р Н. А. ЯВЛИНСКИЙ (N. A. Yavlinsky)
Институт атомной энергии имени
И. В. Курчатова Академии Наук СССР,
Москва, СССР

Scientific Editor: Dr. J. G. BECKERLEY, Division of Scientific and Technical Information, IAEA

FIFTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON IONIZATION PHENOMENA IN GASES

28 August — 1 September, 1961, Munich, Federal Republic of Germany

Sponsored by: Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften,
Fachausschuß Plasma- und Gasentladungsphysik
(The Association of German Physical Societies, Special Committee for Plasma and Gas Discharge Physics)
For information write to: Sekretariat, Fünfte Internationale Konferenz über Ionisationsphänomene in Gasen
Oskar-von-Miller-Ring 18, Munich I, Federal Republic of Germany
Scope: Experimental and theoretical problems in
— fundamental processes in gas discharges (shock processes, radiation, general plasma physics, transport phenomena, surface effects, magnetohydrodynamics);
— discharge types (glow discharge, arc, shock discharge, high-frequency discharge);
— diagnostic methods (spectroscopy, shock waves, microwaves);
— applications.
Manuscripts due by: 1 April 1961

CONFERENCE ON PLASMA PHYSICS AND CONTROLLED NUCLEAR FUSION RESEARCH

4 — 8 September, 1961, Salzburg, Austria

Sponsored by: International Atomic Energy Agency
For information write to: Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion
International Atomic Energy Agency
Kaerntnerring 11, Vienna I, Austria
Scope: General theory of plasma and mathematical methods in research motivated by controlled nuclear fusion interest;
Experimental and theoretical problems in
— plasma confinement, stability, oscillations and turbulence;
— plasma compression, heating and acceleration;
— shock waves in plasma;
— interaction of particles and electromagnetic waves with plasma;
— plasma waves and radiation.
Manuscripts: Abstracts due by 15 May 1961 and papers due by 1 July 1961

CINQUIÈME CONFÉRENCE INTERNATIONALE SUR LES PHÉNOMÈNES D'IONISATION DANS LES GAZ

28 Août — 1er Septembre 1961, Munich (République Fédérale d'Allemagne)

Organisateur: Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften, Fachausschuß Plasma- und Gasentladungsphysik (Association des sociétés de physique d'Allemagne, Commission spéciale pour la physique des plasmas et des décharges dans les gaz)
Pour tous renseignements, écrire au
Sekretariat, Fünfte Internationale Konferenz über Ionisationsphänomene in Gasen
Oskar-von-Miller-Ring 18, Munich I (République fédérale d'Allemagne)
Thème: Recherche pure et appliquée dans les domaines suivants:
— processus fondamentaux de la décharge dans les gaz (processus de choc, rayonnement, physique générale des plasmas, phénomènes de transport, effets de surface, magnétohydrodynamique),
— types de décharge (décharge luminescente, décharge d'arc, décharge de choc, décharge de haute fréquence),
— méthodes d'investigation (spectroscopie, ondes de choc, micro-ondes),
— applications.
Date limite de réception des manuscrits: 1er avril 1961.

CONFÉRENCE SUR LA PHYSIQUE DES PLASMAS ET LA RECHERCHE CONCERNANT LA FUSION NUCLÉAIRE CONTRÔLÉE

4 — 8 Septembre 1961, Salzbourg (Autriche)

Organisateur: Agence internationale de l'énergie atomique
Pour tous renseignements, écrire à
Conférence sur la physique des plasmas et la recherche
concernant la fusion nucléaire contrôlée
Agence internationale de l'énergie atomique
Kaerntnerring 11, Vienne I (Autriche)
Thème: Théorie générale du plasma et méthodes mathématiques de recherche sur la fusion nucléaire contrôlée;
Problèmes théoriques et expérimentaux que posent
— le confinement, la stabilité, les oscillations et la turbulence du plasma;
— la compression, le chauffage et l'accélération du plasma;
— les ondes de choc dans le plasma;
— l'interaction des ondes électromagnétiques et particules et du plasma;
— les ondes et rayonnements du plasma.
Date limite de réception des manuscrits: 15 mai 1961 pour les résumés, 1er juillet 1961 pour les mémoires.

ПЯТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ЯВЛЕНИЯМ ИОНИЗАЦИИ В ГАЗАХ

28 АВГУСТА — 1 СЕНТЯБРЯ 1961 ГОДА, МЮНХЕН, ФЕДЕРАТИВНАЯ РЕСПУБЛИКА ГЕРМАНИЯ

Организатор: Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften, Fachausschuß Plasma- und Gasentladungsphysik
(Специальный комитет по физике плазменных и газовых разрядов Ассоциации германских физических обществ).

За информацией просьба обращаться по адресу:
Sekretariat, Fünfte Internationale Konferenz über Ionisationsphänomene in Gasen
München I., Oskar-von-Miller-Ring 18, Bundesrepublik Deutschland

Тема конференции: Экспериментальные и теоретические проблемы, в частности:
основные процессы в газовых разрядах (процессы столкновения, радиация, общая физика плазмы, явления переноса, поверхностные эффекты, магнитогидродинамика);
типы разрядов (тлеющий разряд, дуговой разряд, ударные разряды, высоко-частотные разряды);
методы измерения (спектроскопия, ударные волны, сантиметровые волны);
практическое применение.

Дата представления докладов: до 1 апреля 1961 г.

КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИССЛЕДОВАНИЯМ В ОБЛАСТИ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ И УПРАВЛЯЕМОГО ЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

4—8 СЕНТЯБРЯ 1961 ГОДА, ЗАЛЬЦБУРГ, АВСТРИЯ

Организатор: Международное агентство по атомной энергии

За информацией просьба обращаться по адресу:
Конференция по исследованиям в области физики плазмы и управляемого ядерного синтеза,
Международное агентство по атомной энергии Кернтнерринг 11, Вена I, Австрия

Тема конференции: Общая теория плазмы и математические методы, применяемые в исследованиях в области управляемого ядерного синтеза.
Экспериментальные и теоретические проблемы:
— удерживание, устойчивость, колебания и турбулентность плазмы;
— сжатие, нагревание и ускорение плазмы;
— воздействие ударной волны на плазму;
— взаимодействие частиц и электромагнитных волн с плазмой;
— волновые явления в плазме и радиации.

Дата представления аннотаций: до 15 мая 1961 г., докладов до 1 июля 1961 г.

QUINTA CONFERENCIA INTERNACIONAL SOBRE FENÓMENOS DE IONIZACIÓN EN LOS GASES

28 DE AGOSTO AL 1° DE SEPTIEMBRE DE 1961, MUNICH (REPÚBLICA FEDERAL DE ALEMANIA)

Patrocinada por la «Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften, Fachausschuß Plasma- und Gasentladungsphysik»
(Federación de Sociedades de Física Alemanas, Comisión especial de física del plasma y de descargas en los gases)

Para obtener informes, escríbase a: Sekretariat, Fünfte Internationale Konferenz über Ionisationsphänomene in Gasen
Oskar-von-Miller-Ring 18, Munich I, República Federal de Alemania

Temario — Problemas experimentales y teóricos referentes a:
— procesos fundamentales de descargas en los gases (procesos de choque, radiación, física general del plasma, fenómenos de transporte, efectos de superficie, magnetohidrodinámica),
— tipos de descarga (luminiscentes, en arco, de choque, y de alta frecuencia),
— métodos de diagnóstico (espectroscopia, ondas de choque, microondas),
— aplicaciones.

Presentación de manuscritos: hasta el 1° de abril de 1961.

CONFERENCIA SOBRE LAS INVESTIGACIONES EN MATERIA DE FÍSICA DEL PLASMA Y FUSIÓN NUCLEAR CONTROLADA

4 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 1961, SALZBURGO (AUSTRIA)

Patrocinada por el Organismo Internacional de Energía Atómica

Para obtener informes, escríbase a: Conferencia sobre las investigaciones en materia de física del plasma y fusión nuclear controlada
Organismo Internacional de Energía Atómica
Kaerntnerring 11, Viena I, Austria

Temario — Teoría general del plasma y métodos matemáticos empleados en las investigaciones motivadas por el interés que suscita la fusión nuclear controlada

Problemas experimentales y teóricos referentes a:
— confinamiento, estabilidad, oscilaciones y turbulencia del plasma,
— compresión, calentamiento y aceleración del plasma,
— ondas de choque en el plasma,
— interacción de partículas y ondas electromagnéticas con el plasma,
— ondas de plasma y radiaciones.

Presentación de manuscritos: Resúmenes, hasta el 15 de mayo de 1961 y memorias, hasta el 1° de julio de 1961.

NUCLEAR FUSION 1 (1961) 69-77

STATISTICAL THERMODYNAMICS OF PLASMAS*

H. S. GREEN

UNIVERSITY OF ADELAIDE, SOUTH AUSTRALIA

A systematic method for the computation, with arbitrary accuracy, of the thermodynamic functions of a gaseous plasma is developed from first principles. The theory of the grand partition function is used to derive a set of exact integral equations, which determine the electronic and ionic distribution functions. An approximate solution of these equations yields results similar to those of the Debye-Hueckel theory of electrolytes. More exact solutions are developed and used to compute the equation of state and other thermodynamic functions for plasmas.

1. Introduction

For the investigation of many problems of plasma physics, it is necessary to know the equation of state, and often also the specific heat of an ionized gas. In the literature, see, e. g. SPITZER [1], it is usually assumed that a gaseous plasma behaves thermodynamically like a perfect gas. It is, of course, certain that, at sufficiently low densities, the perfect gas laws are very closely obeyed by un-ionized gases, where, on account of the low collision frequency, the effect of interactions between the gas molecules can be neglected. The major corrections can, if necessary, be calculated and are proportional to the square of the density. But in ionized gases it is very much less certain that the perfect gas laws are applicable as a good approximation. Owing to the slow rate of attenuation of the Coulomb forces with distance, the interactions between electrons and ions do not become negligible in a plasma, even at very low densities. It seems that the use of the perfect gas laws is tolerated in plasma physics at present mainly because no reliable alternative has yet been found.

The development of an exact statistical thermodynamics of plasmas does, in fact, present considerable difficulties which have not yet been fully overcome. The well-known method found by URSELL [2], MAYER [3] and others for developing thermodynamic functions in powers of the density fails at the outset because the definite integrals representing the virial coefficients all diverge. The reasons for the divergence of the integrals have been discussed by the author in a recent paper [4], where the attempt was also made to adapt the theory of the grand partition function, at least in its formal aspects, to ionized systems. What is still lacking is a practical and systematic method of successive approximations for calculating the thermodynamic functions, and this it is the purpose of the present paper to provide.

Before going any further, it should be mentioned that an approximate method of dealing with ionized systems was found many years ago by DEBYE and HUECKEL [5], and has been very successful in its application to electrolytes. According to the Debye-Hueckel theory, the Coulomb forces between the ions in an electrolyte are not effective beyond a certain distance (of the order of the Debye shielding distance), but are screened by an accumulation of charge of the opposite sign around an ion, in its electrolytic environment. The Debye-Hueckel theory is based on approximations which are recognized as rather crude by modern standards, but, in its essentials, it appears to give a reasonable qualitative and quantitative account of the thermodynamics of electrolytes. There is no difference between a gaseous plasma at high temperatures and the dilute plasma found in electrolytic solutions that would preclude the application of the theory, as a first approximation, to ionized gases. Consequently, the real question is: how good is this approximation, and can anything be done to improve on it?

The Debye-Hueckel theory incorporates two distinct approximations, one of a mathematical kind appropriate to high temperatures, and the other of a statistical nature. The mathematical approximation, in which the Boltzmann factor exp $(-\beta\varphi)$ is replaced by $1-\beta\varphi$, where $\beta = 1/kT$ and φ is the inter-ionic potential, can be improved or even avoided altogether, as MUELLER [6] and GRONWALL [7] were the first to show. The statistical approximation, however, is essential to the method, and can only be avoided by a radical reformulation of the theory. Attempts to put the Debye-Hueckel theory on a rigorous statistical mechanical basis have been made, with some success, during the past decade, notably by KIRKWOOD and POIRIER [8], STREL'TSOVA [9], SALPETER [10], and VEDENOV [11]. While differing widely in method, these various approaches have shown the possibility of overcoming the difficulties mentioned and finding the thermodynamic functions of a plasma more accurately than before. The present paper may be regarded as a further refinement of this work.

The author has been considerably influenced by the analogy between plasma theory and the theory of liquids. In each instance, difficulties arise because every particle is in interaction with many other particles, in a disordered state. This analogy has

---

* Work supported in part by United States Navy Contract No. N60530—5600.

also suggested to YVON [12] the possibility of applying techniques similar to those devised for the theory of liquids, see e. g. GREEN [13]. Yvon's method is based on two approximations: the "superposition approximation" of KIRKWOOD [14], and a linearization approximation. But clearly it should be possible to exhibit the Debye-Hueckel theory as a first approximation in an exact development of the thermodynamics of plasmas. Such a development will, in fact, be unfolded in the present paper.

Kirkwood's superposition approximation is, in the author's opinion, a good one which would not be an important source of error. To remove any cause for doubt, however, it has been avoided by taking as the starting point a set of exact integral equations found by MAYER [15]. Mayer's notation is rather complex and differs from that used here, and for this reason a brief derivation of the basic equations is set out in Section 3 below. Another discussion of the same equations has been published by KIRKWOOD [16]. To the author's knowledge, no systematic method for solving Mayer's equations has yet been proposed, and a new method has therefore been devised for the purpose, which is explained in detail in Sections 3 to 5. Finally, in Section 6 some useful approximations to the thermodynamic functions are obtained, valid for a gaseous plasma at low densities. More exact formulas are also provided, but require a good deal of numerical computation to evaluate. (It is hoped to present some tables in a future publication).

2. Basic equations

Throughout most of this paper, the validity of classical mechanics is assumed. Quantum-mechanical effects are, in fact, known to be unimportant in gaseous plasmas, except for the electrons at temperatures below 10^4 °K, and even there computed corrections to the classical thermodynamic functions are available, see, e.g. SCHRÖDINGER [17]. There is, however, one aspect of quantum-mechanical theory which cannot be ignored, i.e., the existence of a lower bound to the energy of a system of charges of opposite sign. This has to be taken into account in a classical theory by "cutting off" the attractive Coulomb interaction at short distances. Thus, while the mutual potential energy of two charges e_a and e_b of the same sign is

$$\varphi_{ab}(r) = e_a e_b / r \quad (e_a e_b > 0) \tag{1}$$

where r is the distance between them, it will be assumed for charges of opposite sign that

$$\varphi_{ab}(r) = (e_a e_b / r)\,[1 - \exp(-r/\varrho_{ab})] \quad (e_a e_b < 0)\,, \tag{2}$$

where ϱ_{ab} is of the order of the radius of the smallest Bohr orbit. Explicitly,

$$\varrho_{ab} = -2\,\hbar^2\,(m_a + m_b)/(m_a m_b e_a e_b)\,, \tag{3}$$

where m_a is the mass of the charge e_a.

As ϱ_{ab} is always small compared with other characteristic lengths in a plasma, this modification of the attractive Coulomb interaction has little effect for "ordinary" values of r. Its importance lies in the fact that, according to Eq. (2), the energy of a pair of opposite charges cannot be less than $e_a e_b / \varrho_{ab}$, which is exactly the quantum-mechanical lower bound.

The model for a plasma will then be a collection of charged particles which, in a particular state, will consist of N_1 electrons (charge $e_1 = e$), N_2 ions of a particular kind (charge $e_2 = -q\,e$ where q is an integer) and possibly N_3, N_4, ... ions of other kinds. To prevent these particles from spreading over the whole of space, it is supposed that they are contained within a region of volume Ω by a wall (e. g., by a very strong magnetic field) which they cannot penetrate. This wall may be idealized as a potential barrier of extreme height. There is no harm in supposing the existence of a slowly varying external electric field as well. A particle will therefore have a potential energy φ_a, depending on its charge type and position, as well as an interaction energy due to other particles. The positions of the particles of the a charge type in a particular configuration are denoted by $\mathbf{x}_a$, $\mathbf{x}_a'$, $\mathbf{x}_a''$, ... and the total potential energy of the system of N $(N = N_1 + N_2 + \ldots)$ particles is then

$$\Phi_N = \sum_i \varphi_a(\mathbf{x}_a^i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \varphi_{ab}(\mathbf{x}_a^i, \mathbf{x}_b^j)\,. \tag{4}$$

When the temperature $T = 1/(k\,\beta)$ and the chemical potentials μ_1, μ_2... of the various charge species are fixed, the probability that the plasma has N_1 electrons, at the points $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}'_1$,..., N_2 ions of charge e_2, at the points $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_2'$,..., etc., is proportional to

$$\exp\,[\beta\,(N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + \ldots) - \beta\,\Phi_N].$$

Thus, the probability of finding N_1 electrons, N_2 ions of charge e_2, etc., in the plasma (irrespective of positions) is

$$P_N = (Z N_1!\,N_2!\,\ldots)^{-1} \exp\,[\beta\,(N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + \ldots)] \times \int \exp(-\beta\,\Phi_N)\,d\mathbf{X}_N \tag{5}$$

where $d\mathbf{X}_N = d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_1' \ldots d\mathbf{x}_2\,d\mathbf{x}_2' \ldots$, and the integrations with respect to all co-ordinates are from $-\infty$ to $+\infty$. The constant Z is determined by the condition $\sum P_N = 1$, i.e.,

$$Z = \sum_N (N_1!\,N_2!\ldots)^{-1} \exp\,[\beta\,(N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + \ldots)] \times \int \exp(-\beta\,\Phi_N)\,d\mathbf{X}_N\,, \tag{6}$$

where the summation is over all values of N_1, N_2..., etc., from 0 to ∞. There is a relation between Z and the pressure P, in the absence of external forces:

$$Z = \exp\,(\beta\,P\,V). \tag{7}$$

If $n_a\,d\mathbf{x}_a$ is the probability of finding a particle of the a-th kind in the volume element $d\mathbf{x}_a$ at the point $\mathbf{x}_a$, $n_a(\mathbf{x}_a)$ is the number density of particles of the a-th kind at the point $\mathbf{x}_a$, and the total charge density at the point $\mathbf{x}$ is

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = e_1 n_1(\mathbf{x}) + e_2 n_2(\mathbf{x}) + \dots . \tag{8}$$

In the absence of external forces, this will vanish in a neutral plasma, and the number densities n will be constants, so that

$$e_1 n_1 + e_2 n_2 + \dots = 0. \tag{8a}$$

One has

$$Z n_a = \sum_N N_a (N_1! N_2! \dots)^{-1} \exp[\beta(N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + \dots)] \times \int \exp(-\beta \Phi_N)\, d\mathbf{X}_{N-1}, \tag{9}$$

where the integrations are now carried out over all co-ordinates except $\mathbf{x}_a$, for a single particle of the a-th kind. Similarly, if $n_{ab}\, d\mathbf{x}_a\, d\mathbf{x}_b'$ is the probability of finding a particle of the a-th kind in the volume element $d\mathbf{x}_a$ at the point $\mathbf{x}_a$, and a particle of the b-th kind in the volume element $d\mathbf{x}_b'$ at the point $\mathbf{x}_b'$, so that n_{ab} is a pair density, or a joint distribution function,

$$Z n_{ab} = \sum_N N_a (N_b - \delta_{ab}) (N_1! N_2! \dots)^{-1} \times \exp[\beta(N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + \dots)] \int \exp(-\beta\Phi_N) d\mathbf{X}_{N-2}, \tag{10}$$

where now the integration over the co-ordinates $\mathbf{x}_b'$, as well as $\mathbf{x}_a$, is omitted. One can define and express joint distribution functions n_{abc}, n_{abcd}, etc., in a similar way.

The thermodynamic functions

$$z_a = \exp(\beta \mu_a) \tag{11}$$

are the activities of the various charge species. If Z is expressed as a function $Z(\beta, z_1, z_2, \dots)$ of the inverse temperature β and the activities, it follows readily from Eqs. (6), (9), (10), etc., that

$$\begin{aligned} \frac{z_a}{Z}\frac{\partial Z}{\partial z_a} &= \int n_a\, d\mathbf{x}_a \\ \frac{z_a z_b}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z_a \partial z_b} &= \int\!\!\int n_{ab}\, d\mathbf{x}_a\, d\mathbf{x}_b \end{aligned} \tag{12}$$

etc. All the derivatives of Z with respect to the z_a can be expressed in this way.

From Eq. (7) it then follows that

$$\begin{aligned} \beta V z_a (\partial P/\partial z_a) &= \int l_a\, d\mathbf{x}_a \\ \beta V z_a z_b (\partial^2 P/\partial z_a \partial z_b) &= \int\!\!\int l_{ab}\, d\mathbf{x}_a\, d\mathbf{x}_b \end{aligned} \tag{13}$$

etc., where l_a, l_{ab}, etc., are defined by

$$\begin{aligned} n_a &= l_a \\ n_{ab} &= l_{ab} + l_a l_b \\ n_{abc} &= l_{abc} + l_{ab} l_c + l_{ac} l_b + l_{bc} l_a + l_a l_b l_c \end{aligned} \tag{14}$$

and, in general, every partition of the suffixes a, b, c etc., is represented by a term on the right-hand side. The functions l_{ab}, l_{abc}, etc., have the property that they approach the value zero whenever two of the positions $\mathbf{x}_a$, $\mathbf{x}_b$, $\mathbf{x}_c$ are so far apart that they are no longer correlated.

Since $P = 0$ when all the activities z_a are zero, it follows from Eq. (13) that

$$\beta P V = \sum_a \int l_a\, d\mathbf{x}_a - \frac{1}{2!}\sum_{a,b} \int\!\!\int l_{ab}\, d\mathbf{x}_a\, d\mathbf{x}_b + \frac{1}{3!}\sum \int\!\!\int\!\!\int l_{abc}\, d\mathbf{x}_a\, d\mathbf{x}_b\, d\mathbf{x}_c - \dots . \tag{15}$$

This is an expansion which can be used to compute the equation of state of the plasma; it is, as Kirkwood has pointed out [13], quickly convergent even when the densities are not small. If one neglects l_{ab}, l_{abc}, etc., one obtains the perfect gas law $\beta P = \sum_a l_a$; to find the major corrections to the perfect gas law, it is necessary to determine the functions l_{ab}, $l_{abc}, \dots$ Mayer's integral equations for this purpose will be derived in the following Section.

3. The integral equations

To derive the fundamental integral equations, the potential energy, as expressed in Eq. (4), is split into two parts:

$$\Phi_N = \Big[\varphi_a(\mathbf{x}_a) + \sum_{b,i} \varphi_{ab}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b^{(i)})\Big] + \Phi_{N-1}, \tag{16}$$

where the second part, Φ_{N-1}, does not depend on the co-ordinates $\mathbf{x}_a$ of one particle of the a-th kind. Then, if λ_a and u_{ab} are defined by

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \exp[\beta(\mu_a - \varphi_a)], \\ e_{ab} &= \exp(-\beta\varphi_{ab}) = 1 + u_{ab}, \end{aligned} \tag{17}$$

one will have

$$z_a \exp(-\beta\Phi_N) = \lambda_a \exp(-\beta\Phi_{N-1}) \prod_{b,i} (1 + u_{ab}^{(i)}) \tag{18}$$

in which $u_{ab}^{(i)}$ is an abbreviation for $u_{ab}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b^{(i)})$. This expression is first substituted into Eq. (9); under the integral one can then expand the product and replace $\sum_{b,i}{}' u_{ab}^{(i)}$ by $\sum_b (N_b - \delta_{ab}) u'_{ab}$ (through interchanging the co-ordinates $x_b^{(i)}$ and x_b'), replace $\frac{1}{2}\sum_{b,c,i,j}{}' u_{ab}^{(i)} u_{ac}^{(j)}$ by $\frac{1}{2}\sum_{b,c} (N_b - \delta_{ab})(N_c - \delta_{ac} - \delta_{bc}) u'_{ab} u''_{ac}$. etc. Making use of Eqs. (6), (9), (10), etc., to simplify the result, one thus obtains:

$$n_a = \lambda_a \Big[1 + \sum_b n_b u'_{ab}\, d\mathbf{x}_b' + \frac{1}{2!}\sum_{b,c} n_{bc} u'_{ab} u''_{ac}\, d\mathbf{x}_b'\, d\mathbf{x}_c'' + \dots\Big]. \tag{19}$$

Next the expression (18) is substituted into Eq. (10); the same procedure can then be applied, except that the factor $1 + u_{ab} = e_{ab}$ must be left intact. The result is (omitting the primes, which will henceforth be understood to be present where necessary, though not shown):

$$n_{ab} = \lambda_a e_{ab} \Big[n_b + \sum_c n_{bc} u_{ac} d\,\mathbf{x}_c + \frac{1}{2!} \sum_{c,d} n_{bcd} u_{ac} u_{ad} d\,\mathbf{x}_c d\,\mathbf{x}_d + \dots \Big]. \quad (20)$$

Similarly one has

$$n_{abc} = \lambda_a e_{ab} e_{ac} \Big[n_{bc} + \sum_d n_{bcd} u_{ad} d\,\mathbf{x}_d + \dots \Big], \quad (21)$$

etc. These results were obtained by Mayer, in another notation. They are not yet in a very convenient form, as the integrals converge only very slowly where Coulomb forces are involved. Eq. (19) is much improved in this respect by taking the logarithm:

$$\log (n_a/\lambda_a) = \frac{1}{1!} \sum_b \int l_b u_{ab} d\,\mathbf{x}_b + \frac{1}{2!} \sum_{b,c} \int \int l_{bc} u_{ab} u_{ac} d\,\mathbf{x}_b d\,\mathbf{x}_c + \dots \quad (22)$$

with l_b, l_{bc}, etc., defined by Eq. (14). When l_{bc}, l_{bcd}, etc., have been determined, this relation will enable λ_a, and therefore the chemical potential μ_a, to be expressed as a function of β and the number densities. In conjunction with Eq. (15), which represents the pressure in similar form, Eq. (22) will in fact enable all thermodynamic functions to be determined.

To improve the convergence of the integrals in Eq. (20) in a similar way, it is necessary to divide Eq. (20) by (19); the result is

$$n_{ab}/n_a = e_{ab} \Big[l_b + \sum_c \int l_{bc} u_{ac} d\,\mathbf{x}_c + \frac{1}{2!} \sum_{c,d} \int \int l_{bcd} u_{ac} u_{ad} d\,\mathbf{x}_c d\,\mathbf{x}_d + \dots \Big]. \quad (23)$$

A similar equation for n_{abc} is obtained by first dividing Eq. (21) by (19), then subtracting $n_{ab} n_{ac}/n_a^2$, as expressed in (23); one obtains

$$\frac{n_{abc}}{n_a} - \frac{n_{ab} n_{ac}}{n_a^2} = e_{ab} e_{ac} \Big[l_{bc} + \sum_d \int l_{bcd} u_{ad} d\,\mathbf{x}_d + \frac{1}{2!} \sum_{d,e} \int \int l_{bcde} u_{ad} u_{ac} d\,\mathbf{x}_d d\,\mathbf{x}_e + \dots \Big]. \quad (24)$$

The rule for the formation of these equations is now clear; on the left-hand sides one has a sequence of functions $l_b^{(a)}$, $l_{bc}^{(a)}$, $l_{bcd}^{(a)}$, etc., defined by relations similar to Eq. (14):

$$n_{ab}/n_a = l_b^{(a)}$$
$$n_{abc}/n_a = l_{bc}^{(a)} + l_b^{(a)} l_c^{(a)}, \quad (25)$$

etc. On the right-hand sides, one has a sequence of expressions containing a factor $e_{ab} e_{ac} \dots$ and a series of integrals involving the l as the other factor. The result is a system of integral equations to determine the n, or equivalently the l.

Before introducing a practical method for the solution of the above integral equations, it is instructive to notice a method which *fails*. If one attempts to obtain, by successive substitutions, a series solution in powers of the densities, one finds

$$n_{ab} = n_a n_b e_{ab} \Big[1 + \sum_c \int u_{ac} u_{bc} n_c d\,\mathbf{x}_c + \frac{1}{2} \sum_{c,d} \int \int f_{abcd} u_{ac} u_{bc} u_{ad} u_{bd} u_{cd} n_c n_d d\,\mathbf{x}_c d\,\mathbf{x}_d + \dots \Big]$$

where

$$f_{abcd} = (1 + u_{ac}^{-1})(1 + u_{bc}^{-1}) + (1 + u_{bc}^{-1})(1 + u_{bd}^{-1}) + u_{cd}^{-1} - 1.$$

This agrees with a result of the same type found by other methods, see DE BOER [18]. For large values of r (the distance between x_a and x_b'), u_{ab} is very nearly $-\beta \varphi_{ab}$, i. e., $-\beta e_a e_b/r$; each of the integrals in the above series therefore diverges as the volume V is allowed to tend to infinity. The above solution, though it has been usefully applied to non-ionized gases [18], is in fact worthless for plasmas. The reason is easily given: n_{ab} approaches its asymptotic value $n_a n_b$ much more rapidly than the first approximation $n_a n_b e_{ab}$ in the above solution would suggest. According to the Debye-Hueckel theory,

$$n_{ab} \simeq n_a n_b \exp [-\beta e_a e_b (e^{-r/\alpha}/r)]$$

where α is the Debye shielding distance; the asymptotic value is approached very rapidly when $r \gg \alpha$, owing to the screening of the Coulomb forces by polarization of the plasma. Of course the Debye-Hueckel theory still lacks exact verification; but still it is very plausible on physical grounds that the functions l_{bc}, l_{bcd}, etc. do tend to zero very rapidly as the distances between the positions $\mathbf{x}_a$, $\mathbf{x}_b'$ etc. increase. This will be confirmed by the solutions obtained in the next two Sections.

4. An approximate solution

In this section it will be shown that, in an approximation valid at sufficiently high temperatures, the Debye-Hueckel theory can be recovered from the integral equations (23), (24), etc., and that the superposition approximation used by YVON [12] is unnecessary, as it is a direct consequence of the other approximations employed.

Let

$$\gamma_{ab}(r) = \log \frac{n_{ab}(r)}{n_a n_b} \quad (26)$$

so that $-kT \gamma_{ab}(r)$ is the mean interaction potential of two charges e_a and e_b at distance r in the plasma environment. According to Eq. (23),

$$\gamma_{ab} = \beta \varphi_{ab} + \log \Big[1 + \sum_c \int \frac{l_{bc}}{l_b} u_{ac} d\,\mathbf{x}_c + \frac{1}{2} \sum_{c,d} \int \int \frac{l_{bcd}}{l_b} u_{ac} u_{ad} d\,\mathbf{x}_c d\,\mathbf{x}_d + \dots \Big]. \quad (27)$$

At high temperatures, β is small and, if one neglects terms of order β^2, $u_{ac} = -\beta\,\varphi_{ac}$. As the term involving l_{bcd}, and further terms in the series, contain more than one factor $\beta\,\varphi_{ac}$, they may be neglected in the same approximation; also, the logarithm may be expanded, so that

$$\gamma_{ab} \simeq -\beta\Big[\varphi_{ab} + \sum_c \int (l_{bc}/l_b)\,\varphi_{ac}\,d\mathbf{x}_c\Big].$$

As γ_{ab} is small, one may set

$$\frac{l_{bc}}{l_b\,l_c} = \exp(\gamma_{bc}) - 1 \simeq \gamma_{bc}$$

and the equation becomes

$$\gamma_{ab} \simeq -\beta\Big[\varphi_{ab} + \sum_c \int \gamma_{bc}\,\varphi_{ac}\,n_c\,d\mathbf{x}_c\Big]. \qquad (27a)$$

The easiest way to solve this integral equation is by Fourier transforms, defining

$$\gamma_{ab}(k) = \int \gamma_{ab}(r)\exp(\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,d\,\mathbf{r}$$

$$\varphi_{ab}(k) = \int \varphi_{ab}(r)\exp(\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,d\,\mathbf{r}$$
$$= 4\,\pi\,e_a\,e_b\,[k^2\,(1 + k^2\,\varrho_{ab}{}^2)]^{-1} \qquad (28)$$

with ϱ_{ab} defined in Eq. (3) for $e_a\,e_b < 0$ and $\varrho_{ab} = 0$ for $e_a\,e_b > 0$. One finds

$$\gamma_{ab}(k) = -\beta\Big[\varphi_{ab}(k) + \sum_c n_c\,\gamma_{bc}(k)\,\varphi_{ab}(k)\Big], \qquad (29)$$

a set of equations which can always be solved for the $\gamma_{ab}(k)$, and hence the $\gamma_{ab}(r)$ by Fourier inversion. When there are only two kinds of charges present, equal and opposite in sign, so that $e_1 = -e_2 = e$, the solution (as will be seen in more detail in Section 5), is

$$\gamma_{11}(r) = \gamma_{22}(r) = -\frac{\beta\,e^2\,\mathrm{e}^{-r/\alpha}}{r}$$

$$\gamma_{12}(r) = \gamma_{21}(r) = \frac{\beta\,e^2}{r}\,(\mathrm{e}^{-r/\alpha} - \mathrm{e}^{-r/\varrho}), \qquad (30)$$

where

$$\alpha^{-2} = 8\,\pi\,\beta\,n\,e^2, \quad \varrho = \varrho_{12} \qquad (31)$$

and ϱ has been neglected in comparison with α. This is the same as the result of the Debye-Hueckel theory, apart from the term involving $\exp(-r/\varrho)$, which has been introduced through the modification of the Coulomb law explained in Section 2.

It is possible to improve on this approximate solution in two ways. One can of course solve Eq. (27), e. g. by numerical methods, if only the terms involving l_{bcd}, l_{bcde}, etc., are neglected. But it is also possible to take these terms into account, by solving Eq. (24) and similar equations. To illustrate this possibility, Eq. (24) will be solved in the same approximation used above to obtain the Debye-Hueckel distributions. Combining Eqs. (23) and (24), or directly from Eqs. (21) and (19), one has

$$\frac{n_{abc}}{n_a} = e_{ab}\,e_{ac}\Big[n_{bc} + \sum_d \int (n_{bcd} - n_{bc}\,n_d)\,u_{ad}\,d\mathbf{x}_d + \dots\Big]. \qquad (32)$$

Therefore, if

$$\gamma_{a,\,bc} = \log\left(\frac{n_{abc}}{n_a\,n_{bc}}\right) \qquad (33)$$

one finds, using the same approximations which led to Eq. (27a),

$$\gamma_{a,\,bc} \simeq -\beta\Big[\varphi_{ab} + \varphi_{ac} + \sum_d \int \gamma_{a,\,bc}\,\varphi_{ad}\,n_d\,d\,\mathbf{x}_d\Big]. \qquad (34)$$

By comparison with Eq. (27a), it is easy to see that this equation has the solution

$$\gamma_{a,\,bc} = \gamma_{ab} + \gamma_{ac} \qquad (35)$$

and consequently

$$n_{abc} = \frac{n_{ab}\,n_{ac}\,n_{bc}}{n_a\,n_b\,n_c} \qquad (36)$$

in this approximation. The above Eq. (36) is a formal statement of the "superposition" approximation of Kirkwood. This approximation, as previously stated, is therefore a direct consequence of the approximations used to derive Eq. (27a). A similar treatment of the equation for n_{abcd} yields

$$n_{abcd} = (n_{ab}\,n_{ac}\,n_{ad}\,n_{bc}\,n_{cd})/(n_a\,n_b\,n_c\,n_d)^2. \qquad (37)$$

Before passing to the exact treatment of the integral equations, it should be noticed that as γ_{ab} has been assumed to be small, Eq. (26) can be written

$$\gamma_{ab} = \log\left[1 + \frac{l_{ab}}{l_a\,l_b}\right] \simeq \frac{l_{ab}}{l_a\,l_b}$$

in conformity with the approximation which has adopted in this section.

5. An exact development

The preliminary treatment of the integral equations in the last section has shown that the Debye-Hueckel theory may be applied to plasmas at "sufficiently high" temperatures. The crude approximation adopted there, however, failed to provide any indication of the temperature limit below which corrections are likely to be required. If an extremely high limit existed, the solution would need correction anyway because of relativistic effects, especially magnetic interactions between the rapidly moving electrons, which become important above 10^9 °K. But, as will be shown in this Section, the range of validity of the Debye-Hueckel theory extends much further than the approximations used by Debye and Hueckel, and others who have recovered the theory, would suggest. It is to a large extent independent of the expansion in inverse powers of the temperature, of the linearization of equations, and even of the superposition approximation. It depends only on the low density approximation usual in ideal gas theory; the superposition approximation of course has a similar validity. The limit is probably reached beyond a density $\sim\alpha^{-3}$, where α is the shielding length.

It will be found convenient to introduce the set of functions λ_{ab}, λ_{abc} etc., and γ_{ab}, γ_{abc}, etc., defined by

$$\lambda_{ab} = \frac{l_{ab}}{n_a n_b}\,, \quad 1 + \lambda_{ab} = \exp \gamma_{ab}\,; \tag{38}$$

$$\lambda_{abc} = \frac{l_{abc}}{n_a n_b n_c}\,,$$

$$1 + \lambda_{ab} + \lambda_{bc} + \lambda_{ac} + \lambda_{abc} = \exp(\gamma_{ab} + \gamma_{bc} + \gamma_{ac} + \gamma_{abc})\,. \tag{39}$$

The first of the integral equations to be solved, Eq. (23), can be written

$$\lambda_{ab} - \sum_c \int \lambda_{bc}\, u_{ac}\, d\,\omega_c = \mu_{ab}\,, \tag{40}$$

where $d\,\omega_c = n_c\, d\,\mathbf{x}_c$ and

$$\mu_{ab} = u_{ab}\left[1 + \sum_c \int \lambda_{bc}\, u_{ac}\, d\omega_c\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\, e_{ab} \sum_{c,\,d} \iint \lambda_{bcd}\, u_{ac}\, u_{ad}\, d\omega_d + \ldots. \tag{41}$$

Similarly, Eq. (24) can be written

$$\lambda_{abc} - \sum_d \int \lambda_{bcd}\, u_{ad}\, d\omega_d = \mu_{abc}\,, \tag{42}$$

where

$$\mu_{abc} = \lambda_{ab}\, \lambda_{ac} + (e_{ab}\, e_{ac} - 1)\left[\lambda_{bc} + \sum_d \int \lambda_{bcd}\, u_{ad}\, d\,\omega_d\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\, e_{ab}\, e_{ac} \sum_{d,\,e} \iint \lambda_{bcde}\, u_{ad}\, u_{ae}\, d\omega_d\, d\omega_e + \ldots. \tag{43}$$

The integral equations for λ_{abcd} etc. can be formulated in a similar way.

A formal solution of Eqs. (40) and (42) can be obtained by introducing the "resolvent kernel" k_{ab}, which satisfies the integral equation

$$k_{ab} - \sum_c \int k_{bc}\, u_{ac}\, d\,\omega_c = u_{ab}\,. \tag{44}$$

The solution of this equation will be given in the next paragraph; at the moment it is only necessary to notice that, since u_{ab} is symmetric, i.e., $u_{ab} = u_{ba}$, k_{ab} is also symmetric. It follows easily from Eqs. (40) and (44) that

$$\lambda_{ab} = \mu_{ab} + \sum_c \int k_{ac}\, \mu_{cb}\, d\,\omega_c\,. \tag{45}$$

Similarly, it follows from Eqs. (42) and (44) that

$$\lambda_{abc} = \mu_{abc} + \sum_d \int k_{ad}\, \mu_{abc}\, d\,\omega_d\,, \tag{46}$$

etc.

The solution of Eq. (44) can be accomplished directly by Fourier transforms, and k_{ab} is thereby expressed as a definite integral* involving Bessel functions [19]. But for analytical purposes it is more convenient to adopt an iterative method, writing Eq. (44) in the form

$$k_{ab} + \beta \sum_c k_{bc}\, \varphi_{ac}\, d\omega_c = -\beta\, \varphi_{ab} + V_{ab}\,, \tag{47}$$

where

$$V_{ab} = v_{ab} + \sum_c \int k_{bc}\, v_{ac}\, d\omega_c\,,$$

$$v_{ab} = u_{ab} + \beta\, \varphi_{ab} = \mathrm{e}^{-\beta\,\varphi_{ab}} - 1 + \varphi_{ab}\,. \tag{48}$$

It will be noticed that Eq. (47) is the same as (27a), apart from the additional term v_{ab}, and it can be solved in the same way.

The general solution is

$$k_{ab} = -\beta\, \psi_{ab} + V_{ab} - \beta \sum_c \int \psi_{ac}\, V_{bc}\, d\omega_c\,, \tag{49}$$

where

$$\psi_{bc} = \varphi_{bc} \exp(-r/\alpha)\,,$$

$$\alpha^{-2} = 4\,\pi\,\beta \sum_b n_b\, e_b^2. \tag{50}$$

To verify that Eq. (49) does satisfy the integral equation (47) in the approximation where ϱ, the Bohr radius, is neglected in comparison with α, the Debye shielding distance, one can make use of the mathematical identity

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-ps}}{s}\, \frac{\mathrm{e}^{-qt}}{t}\, d\,\mathbf{s} = \frac{4\,\pi\,(\mathrm{e}^{-qr} - \mathrm{e}^{-pr})}{(p^2 - q^2)\, r}\,,$$

where $\mathbf{t} = \mathbf{r} - \mathbf{s}$. From this it follows easily that

$$\beta \sum_c \int \varphi_{ac}\, \psi_{bc}\, d\omega_c = \varphi_{ab} - \psi_{ab} \tag{51}$$

in the approximation stated; thus $\beta\,\psi_{ab}$ is the resolvent kernel of Eq. (47). Combining Eqs. (48) and (49), one has

$$k_{ab} = -\beta\, \psi_{ab} + j_{ab} + \sum_c \int j_{ac}\, k_{cb}\, d\,\omega_c\,, \tag{52}$$

where

$$j_{ab} = v_{ab} - \beta \sum_c \int \psi_{ac}\, v_{bc}\, d\omega_c\,. \tag{53}$$

The equation (52), unlike the original (44), can be solved by iteration, as the kernel j_{ab} is not singular. However, as v_{ab} is singular by itself, the two terms on the right side of Eq. (53) may not be separated. At gaseous densities the approximation $k_{ab} = -\beta\,\psi_{ab} + j_{ab}$ is valid, because the density appears as a factor of $d\,\omega_c = n_c\, d\,\mathbf{x}_c$.

Returning to the determination of the functions λ_{ab}, λ_{abc}, etc., it is clear that they can be found from an iterative process, based on Eqs. (45) and (41), (46) and (43) etc. The plan is to substitute in (41), (43), etc., a set of first approximations λ_{ab}^0, λ_{abc}^0, etc., to the functions λ_{ab}, λ_{abc}, etc., and thus obtain corresponding approximations μ_{ab}^0, μ_{abc}^0, etc., to μ_{ab}, μ_{abc}, etc. These are then substituted into (45), (46), etc., to obtain improved approximations λ'_{ab}, λ'_{abc}, etc. to the λ. This process is then repeated until the desired accuracy is obtained. Clearly the efficacy of this procedure depends on the initial choice of λ_{ab}, $\lambda^0_{abc} \ldots$; if they are not well chosen, the convergence of the series approximations may be poor or completely illusory. One would like to have a set of functions which are exact solutions of the integral equations, or nearly so, at low densities. In the remainder of this Section it will be shown how such functions can be constructed.

---

* This has been done (according to the presently available preprint) in a paper entitled "Correction to the Debye-Hueckel Theory" by D. L. Bowers and E. E. Salpeter.

At first sight, the construction of solutions valid at low densities seems an easy matter, as the elements $d\omega_c$, $d\omega_d$, etc. in Eq. (41) are proportional to the density. However, even the terms involving many integrations furnish contributions which are independent of the density, as one can see most easily by setting

$$\begin{aligned}\lambda_{bcd} = (1+\delta_{bcd})\,(1+\lambda_{bc})\,(1+\lambda_{bd})\,(1+\lambda_{cd}) \\ -\lambda_{bc} - \lambda_{bd} - \lambda_{cd} - 1\,,\end{aligned} \qquad (54)$$

where, according to (39),

$$\delta_{bcd} = \exp\,(\gamma_{bcd}) - 1\,. \qquad (54a)$$

The term $\lambda_{bc}\,\lambda_{bd}$ in the above expression for λ_{bcd}, when substituted into

$$\iint \lambda_{bcd}\, u_{ac}\, u_{ad}\, d\omega_c\, d\omega_d,$$

yields an expression which, according to Eq. (40), is equal to $(\lambda_{ab} - \mu_{ab})^2$. The other terms are less important and vanish with the density. Thus, to obtain an expression correct at low densities, one should substitute $\lambda_{bc}\,\lambda_{bd}$ for λ_{bcd}, $\lambda_{bc}\,\lambda_{bd}\,\lambda_{be}$ for λ_{bcde}, etc., and thus obtain from Eq. (41)

$$\begin{aligned}\mu_{ab} &= u_{ab}\,(1+f_{ab}) + e_{ab}\exp f_{ab} - 1 - f_{ab},\\ f_{ab} &= \lambda_{ab} - \mu_{ab} = \sum_c \int \lambda_{bc}\, u_{ac}\, d\omega_c\,.\end{aligned} \qquad (55)$$

Eliminating μ_{ab}, this yields the equation

$$e_{ab}\exp f_{ab} = 1 + \lambda_{ab} \qquad (56)$$

or taking logarithms,

$$\begin{aligned}\lambda_{ab} - \sum_c \int \lambda_{bc}\, u_{ac}\, d\omega_c &= \mu_{ab}\,,\\ \mu_{ab} &= -\beta\,\varphi_{ab} + \lambda_{ab} - \log\,(1+\lambda_{ab}).\end{aligned} \qquad (56a)$$

A formal solution of this integral equation is provided by Eq. (45), and at low densities one has

$$\begin{aligned}\lambda_{ab} &= \mu_{ab} - \beta \sum_c \int k_{ac}\,\varphi_{cb}\, d\omega_c\\ &= \mu_{ab} + k_{ab} + \beta\,\varphi_{ab}\, V_{ab}\end{aligned} \qquad (57)$$

according to Eq. (47). Using the formulas for μ_{ab} in Eq. (56a), and k_{ab} in (48), one finds

$$1 + \lambda_{ab} = \exp\left\{-\beta\left[\psi_{ab} + \sum_c \int \psi_{ac}\, v_{bc}\, d\omega_c\right]\right\}. \qquad (58)$$

At sufficiently low densities, the integral in the exponent of Eq. (58) is negligible, and one then recovers the formula $n_{ab} = n_a\, n_b \exp\,(-\beta\,\varphi_{ab})$ of the Debye-Hueckel theory. The validity of this formula is therefore not confined to high temperatures, as earlier derivations might suggest. Eq. (58) shows, however, that the formula requires correction at finite densities (greater than α^{-3}), and exhibits the most important correction.

A solution of Eqs. (42) and (43), valid under the same conditions, can be obtained in a similar way. When Eq. (54) is substituted into (43), it is convenient to set

$$\lambda_{bcd} = \lambda_{bd}\,\lambda_{cd} + \delta_{bcd}\,(1+\lambda_{bd})\,(1+\lambda_{cd})\,, \qquad (59)$$

so that

$$\lambda_{bcd} = \lambda_{bc}\,(\lambda_{ba} + \lambda_{cd} + \lambda_{bcd}) + \lambda_{bcd}. \qquad (60)$$

Density-independent contributions to μ_{abc} also arise from the part

$$\begin{aligned}\lambda_{bc}\,(\lambda_{bd} + \lambda_{cd} + \lambda'_{bcd})\,(\lambda_{be} + \lambda_{ce} + \lambda'_{bce})\\ + (\lambda_{bd} + \lambda_{cd})\,\lambda'_{bce} + (\lambda_{be} + \lambda_{ce})\,\lambda'_{bcd} + \lambda'_{bcd}\,\lambda'_{bce}\end{aligned}$$

of λ_{bcde}, etc., so that to the desired order of approximation.

$$\begin{aligned}\mu_{abc} = \lambda_{ab}\,\lambda_{ac} + (e_{ab}\,e_{ac} - 1)\,[\lambda_{bc}\,(1 + f_{ab} + f_{ac} + f'_{abc}) + f'_{abc}]\\ + e_{ab}\,e_{ac}\,[\lambda_{bc}\exp\,(f_{ab} + f_{ac} + f'_{abc}) - \lambda_{bc}(1 + f_{ab} + f_{ac} + f'_{abc})\\ + \exp\,(f_{ab} + f_{ac} + f'_{abc}) - \exp\,(f_{ab} + f_{ac}) - f'_{abc}]\,,\end{aligned} \qquad (61)$$

where

$$\begin{aligned}(1+\lambda_{bc})\, f'_{abc} &= \lambda_{abc} - \mu_{abc} - \lambda_{bc}\,(\lambda_{ab} + \lambda_{ac})\\ &= (1+\lambda_{bc}) \sum_d \lambda'_{bcd}\, u_{ad}\, d\omega_d\,.\end{aligned} \qquad (62)$$

If one eliminates μ_{abc} between Eqs. (61) and (62) and simplifies, with the help of Eq. (56), one finds

$$\begin{aligned}\lambda_{abc} + \lambda_{bc} + \lambda_{ab} + \lambda_{ac} + 1\\ = (1+\lambda_{bc})\,(1+\lambda_{ab})\,(1+\lambda_{ac})\exp f'_{abc}\end{aligned} \qquad (63)$$

and, with the help of (56a),

$$\begin{aligned}\mu_{abc} = \lambda_{abc} - (1+\lambda_{bc})\log\left[\frac{(1+\lambda_{ac}+\lambda_{bc}+\lambda_{abc}}{(1+\lambda_{ac})\,(1+\lambda_{ab})\,(1+\lambda_{bc})}\right]\\ - \lambda_{bc}\,\{[\beta\,(\varphi_{ab}+\varphi_{ac})] + \log\,(1+\lambda_{ab})\,(1+\lambda_{ac})\}.\end{aligned} \qquad (64)$$

Now λ_{abc} can be found by using the solution (46) of the integral equation; discarding some terms which vanish with the density, one finds that $f_{abc} = 0$, or, equivalently, $\delta_{bcd} = 0$ in Eq. (54). Thus the superposition approximation is rigorously applicable, at low densities.

A similar discussion of the equation for λ_{abcd} shows that the superposition approximation again holds at low densities, in the form

$$n_{abcd} = n_{ab}\, n_{ac}\, n_{ad}\, n_{bc}\, n_{bd}\, n_{cd}/(n_a\, n_b\, n_c\, n_d)^2 \qquad (65)$$

and this is obviously also a feature of the higher distribution functions.

The low-density approximations which have been obtained in this Section can be improved by the iteration procedure already discussed. The improved solutions will not be written down here, but a few words should be added concerning the computation of the μ_{ab}, μ_{abc}, etc., from the formulas (41), (43), etc. To compute μ_{ab} one will substitute in general expressions of the type

$$\lambda_{bcd} = \lambda_{bc}\,\lambda_{bd} + \lambda^{\dagger}_{bcd},$$

$$\lambda_{bcde} = \lambda_{bc}\,\lambda_{bd}\,\lambda_{be} + \lambda^{\dagger}_{bcd}\,\lambda_{be} + \lambda^{\dagger}_{bce}\,\lambda_{bd} + \lambda^{\dagger}_{bed}\,\lambda_{bc} + \lambda^{\dagger}_{bcde},$$

etc. It will be found that if f_{ab} is defined again as in Eq. (55), and

$$f^{(2)}_{ab} = \frac{1}{2!}\sum_{c,d} \int\!\!\int \lambda^{\dagger}_{bcd}\, u_{ac}\, u_{ad}\, d\,\omega_c\, d\,\omega_d\,,$$

$$f^{(3)}_{ab} = \frac{1}{3!}\sum_{c,d,e}\int\!\!\int\!\!\int \lambda^{\dagger}_{bcde} u_{ac}\, u_{ad}\, u_{ae}\, d\,\omega_c\, d\,\omega_d\, d\,\omega_e\,, \qquad (67)$$

etc., then

$$\mu_{ab} = -(1 + f_{ab}) + e_{ab} \exp\,(f_{ab} + f^{(2)}_{ab} + f^{(3)}_{ab} + \ldots) \qquad (68)$$

The expansion in the exponent of this formula is in many ways comparable with the "cluster" expansions in the theory of imperfect gases [18].

6. Thermodynamics of gaseous plasmas

The results of the last Section enable one to calculate the distribution functions, and hence the thermodynamic functions, as accurately as desired. From the qualitative point of view, it is clear that the validity of the Debye-Hueckel theory extends much further than the approximations used by Debye and Hueckel, and others who have recovered the theory, would suggest. The next simplest approximation is represented by Eq. (58), and some elementary calculations based on this formula will be presented in this Section.

For the equation of state, one can use the result*

$$P = \sum_a p_a$$

$$p_a = \frac{n_a}{\beta} + \frac{1}{6}\sum_b e_a e_b \int \frac{l_{ab}}{r}\, d\,x_b \qquad (69)$$

which, though equivalent to Eq. (15), yields somewhat more accurate results with given approximations to l_{ab}, l_{abc}, etc. For the internal energy per unit volume, one has*

$$U = \sum_a U_a$$

$$U_a = \frac{3}{2}\frac{n_a}{\beta} + \frac{1}{2}\sum_b e_a\, e_b \int \frac{l_{ab}}{r}\, d\,x_b\,. \qquad (70)$$

From Eqs. (69) and (70) it is clear that the thermodynamic variables of most interest depend on the integral

$$I_{ab} = \int l_{ab}\, \varphi_{ab}\, dx_b$$

which can be computed with the help of Eq. (58), from which one has

$$l_{ab} = n_a\, n_b\, [\exp\,(-\beta\,\chi_{ab}) - 1]\,,$$

$$\chi_{ab} = \psi_{ab} + \sum_c \int \psi_{ab}\, v_{bc}\, d\omega_c\,. \qquad (72)$$

In order to evaluate Eq. (71) exactly, one would have to resort to numerical methods. At high temperatures, however, one can approximate l_{ab} by $-\beta\, n_a\, n_b\, \chi_{ab}$. Making use of the identity

$$\int e^{-ps}\left((e^{-h/t} - 1 + \frac{h}{t}\right) d\,s$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{16\,\pi\, h\, (e^{-qr} - e^{-pr})\, J_2(2\sqrt{h\,q}\,)}{q\,(p^2 - q^2)\, r}\, d\,q, \qquad (73)$$

one finds

$$\chi_{ab} = \varphi_{ab}\Bigl\{e^{-r/\alpha} + 16\,\pi\,\beta \sum_c n_c\, e_c^{\,2}$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{(e^{-q\,r} - e^{-r/\alpha})\, J_2\,(2\sqrt{\beta\, e_b\, e_c\, q})}{q\,(\alpha^{-2} - q^2)}\, d\,q\Bigr\}. \qquad (74)$$

To the proposed order of approximation, one has therefore

$$I_{bc} = 4\,\pi\, n_b\, n_c\, e_b^{\,2}\, e_c^{\,2}\, \alpha.$$

It is hoped that more accurate values, at present being computed, will soon be available**. The present approximation, equivalent to the Debye-Hueckel approximation, yields:

$$\beta\, p_a = n_a\left[1 + \frac{\beta\, e_a^{\,2}}{6\,\alpha}\right];$$

$$\beta\, U_a = n_a\left[\frac{3}{2} + \frac{\beta\, e_a^{\,2}}{2\,\alpha}\right]. \qquad (76)$$

To form some idea of the importance of corrections to the perfect gas laws, one may assume $T = 10^4$ °K, so that $\beta = 10^{12}\ \mathrm{erg}^{-1}$. For a plasma of electrons and singly charged ions, $\beta\, e^2/\alpha$ becomes comparable to unity at densities $\sim 10^{18}$ electrons/cm^3, and the correction is still appreciable at densities as low as 10^6 electrons/cm^3. At higher temperatures the effect is somewhat less, but if doubly or multiply charged ions are present, it is increased. At high densities corrections to the perfect gas laws are of course very important. A more detailed quantitative study will be possible in the near future.

Acknowledgment

Part of this work was performed while the author was visiting the Michelson Laboratory, United States Naval Ordnance Test Station, China Lake, California, and the author would like to express his appreciation of the facilities provided by the Research Department there.

---

* See Eqs. (27) and (37) of reference [4].

** The required calculations have been programmed by D. S. Villars and the results will be available shortly.

References

[1] Spitzer, L., Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, New York 1956) 105 p.
[2] Ursell, H. D., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **23** (1927) 685
[3] Mayer, J. E., *J. Chem. Phys.* **5** (1937) 67
[4] Green, H. S., *Phys. Fluids* **2** (1959) 341, see particularly pp. 348—9.
[5] Debye, P., and Hueckel, E., *Phys. Zeits.* **24** (1923) 185
[6] Mueller, H., *Phys. Zeits.* **28** (1927) 324
[7] Gronwall, T. H. *et al*,, *Phys. Zeits.* **29** (1928) 358
[8] Kirkwood, J. G., and Poirier, J. C., *J. Phys. Chem.* **58** (1954) 591
[9] Strel'tsova, E. A., *Zhur. Eksptl' i Teoret. Fiz.* **26** (1954) 173
[10] Salpeter, E. E., *Ann. Phys.* (*New York*) **5** (1958) 183; see also reference [19]
[11] Vedenov, A. A., *Soviet Physics Doklady* **4** (1959) 364
[12] Yvon, J., *J. Phys. Radium* **19** (1958) 733
[13] Green, H. S., Molecular Theory of Fluids (North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1952) 264 p.
[14] Kirkwood, J. G., and Boggs, E. M., *J. Chem. Phys.* **10** (1942) 394
[15] Mayer, J. E., *J. Chem. Phys.* **15** (1947) 187
[16] Kirkwood, J. G., and Salzburg, Z. W., *Disc. Faraday Soc.* **15** (1953) 28
[17] Schrödinger, E., Statistical Thermodynamics, (Cambridge Univ. Press 1946) 88 p.
[18] de Boer, J., Theory of Compressed Gases (H. J. Paris, Amsterdam 1940)
[19] Bowers, D. L., and Salpeter, E. E., *Phys. Rev.* **119** (1960) 1180.

(Manuscript received on 26 July 1960)

NUCLEAR FUSION 1 (1961) 78-81

A SIMPLIFIED ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF PLASMA GUNS

J. G. Linhart

Association Euratom-Comitato Nazionale per le Richerche Nucleari

Frascati, Italy

The subject of this report is the acceleration of a cylindrical layer of plasma by an azimuthal magnetic field, a process similar to the ordinary $B_\varphi I_z$ pinch. The magnetic field is generated by a current drawn from a condenser. The system can be represented by an L, C circuit in which the value of the inductance is changing owing to the movement of the plasma conductor. A simple but approximate description of the acceleration of the plasma can then be derived using the adiabatic theorem for oscillators together with the law of conservation of energy. The resulting approximate solutions are compared with numerical solutions of the appropriate differential equations. The approximate solutions are also applied to a rail-type of plasma gun previously reported by Artsimovich, *et al.* [*Zhur. Eksptl' i Teoret. Fiz.* **33** (1957) 3].

Introduction

A cylindrical layer of plasma, accelerated towards its axis, may have interesting applications in nuclear fusion [1], in generation of intense magnetic fields, and elsewhere. One suitable acceleration mechanism is akin to the well-known pinch effect and can be described as follows.

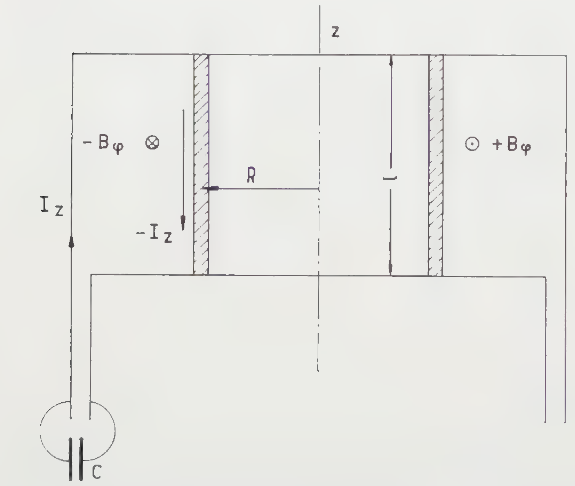

Fig. 1 A schematic representation of a cylindrical plasma gun.

An axial current I_z flowing through the plasma layer generates a magnetic field B_φ, see Fig. 1. The corresponding Lorentz force per centimetre length of the cylindrical shell of plasma is therefore,

$$F_r = - I_z B_\varphi . \tag{1}$$

This force accelerates a mass NM where M is the ion mass and N the density of positive ions per cm length of the cylindrical shell of plasma. The equation of motion is then written:

$$NM (\partial^2 R/\partial t^2) = - I_z B_\varphi \tag{2}$$

where R is the mean radius of the plasma shell. The current I_z is usually drawn from a battery of condensers, whose capacity is C. The rest of the circuit through which the current I_z flows has the nature of an inductance L. Consequently, the flow of the current is governed by a circuit equation:

$$(\partial/\partial t)(L I_z) = - Q/C \tag{3}$$

where Q is the charge on the condenser bank and

$$I_z = \partial Q/\partial t . \tag{4}$$

Equations (2), (3) and (4) are the basic differential equations describing the acceleration of the plasma shell. They are nonlinear and impossible to solve analytically.* These equations can be simplified in form, as will be shown in the next section, and can then be solved numerically. However, the numerical solutions apply to only a finite number of specific cases and are somewhat inflexible. In order to eliminate this drawback an approximate method has been developed.

The approximate method is based on the adiabatic theorem for oscillators, which in the case of an electrical L, C circuit can be expressed as:

$$\frac{\text{Stored electromagnetic energy}}{\text{Resonant frequency}} = \frac{W}{f}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[L I_z^2 + (Q^2/C)\right]}{(2\pi\sqrt{LC})^{-1}} = \text{constant}. \tag{5}$$

It will be shown that, in many cases, this theorem together with the law of conservation of energy

$$\tfrac{1}{2} Q N M (\partial R/\partial t)^2 + \tfrac{1}{2} L I_z^2 + \tfrac{1}{2}(Q^2/C) = \tfrac{1}{2}(Q_0^2/C) \tag{6}$$

---

* Eqs. (2) and (3) are the Lagrangian equations for the system, the Lagrangian being

$$\mathfrak{L}(R, \partial R/\partial t, Q, \partial Q/\partial t) = \tfrac{1}{2} M N l (\partial R/\partial t)^2$$

$$+ \tfrac{1}{2} L (\partial Q/\partial t)^2 - \tfrac{1}{2}(Q^2/C) .$$

describes very closely the acceleration of the plasma layer. In Eq. (6) l is the length of the cylindrical shell of plasma, Q_0 the initial charge on C. Joule heating of the plasma is neglected.

In the final section of this paper the above-mentioned approximation will be compared with solutions obtained by numerical methods. In an appendix the applicability of the adiabatic approximation to the linear (rail) type of plasma gun will be discussed briefly and the results of the approximate analysis compared with computations carried out by ARTSIMOVICH *et al.* [2].

Mathematical formulation of the problem

Let us first rewrite Eqs. (2), (3) and (4) for a cylindrical shell conductor. The azimuthal field B_φ in gauss is related to the current I_z in amperes by

$$B_\varphi = 0.2\ I_z/R \tag{7}$$

and the total inductance L in henries is

$$L = 2 \cdot 10^{-9}\, l \ln (R_0/R) + L_0, \tag{8}$$

where L_0 is the inductance of condensers, connecting leads, etc. and R_0 is the initial mean radius of the plasma shell in centimetres. (The mixture of units is appropriate to our problem). Substituting Eqs. (7) and (8) into (2) and (3) yields:

$$MN\,(\partial^2 R/\partial t^2) = -0.2\,(I_z^2/R) \tag{9}$$

and

$$-2 \cdot 10^{-9} \frac{l}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial t} + \left[2 \cdot 10^{-9}\, l \ln \frac{R_0}{R} + L_0\right] \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\frac{Q}{C}\,. \tag{10}$$

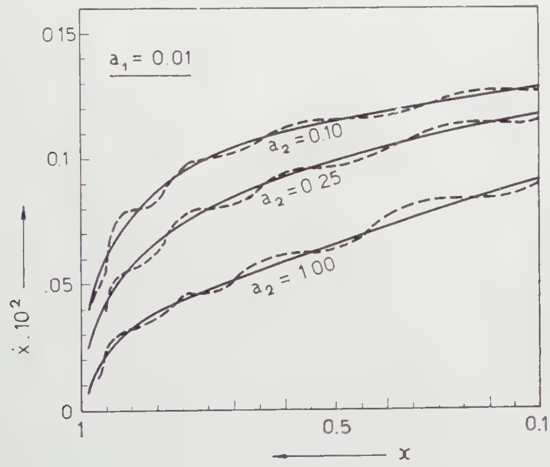

Fig. 2 The normalized velocity $\dot{x}$ as a function of x for $a_1 = 1/100$ and $a_2 = 1$, $1/4$, and $1/10$. Numerically computed results are represented by broken lines. Adiabatic approximation results are represented by solid lines.

Let us change to dimensionless variables:

$$R/R_0 = x,\ Q/Q_0 = q,\ \omega^2 = (2 \cdot 10^{-9}\, l\, C)^{-1},\ \omega\, t = \tau \tag{11}$$

and introduce the two parameters

$$a_1 = Q_0^2/(100\, MNR_0^2),\ a_2 = L_0/(2 \cdot 10^{-9}\, l).$$

Eqs. (9) and (10) become

$$x\,\ddot{x} = -a_1\,\dot{q}^2 \tag{9a}$$

$$(\dot{x}/x)\,\dot{q} + (\ln x - a_2)\,\ddot{q} - \dot{q} = 0 \tag{10a}$$

for which the initial conditions are $\tau = 0$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$, $q_0 = 1$ and $\ddot{q}_0 = 0$. The dots denote differentiation with respect to τ.

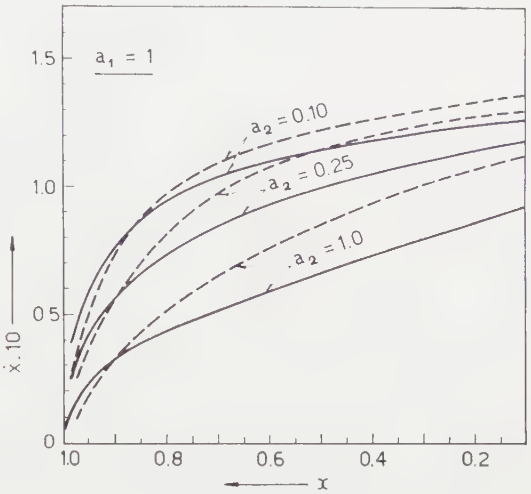

Fig. 3 The normalized velocity $\dot{x}$ as a function of x for $a_1 = 1$ and $a_2 = 1$, $1/4$, and $1/10$. Numerically computed results are represented by broken lines. Adiabatic approximation results are represented by solid lines.

These two simultaneous, nonlinear differential equations are not soluble by analytical means and have been solved numerically, using the CERN Mercury computer, for several values of the parameters a_1 and a_2. The results of these computations are plotted in Figs. 2, 3 and 4.

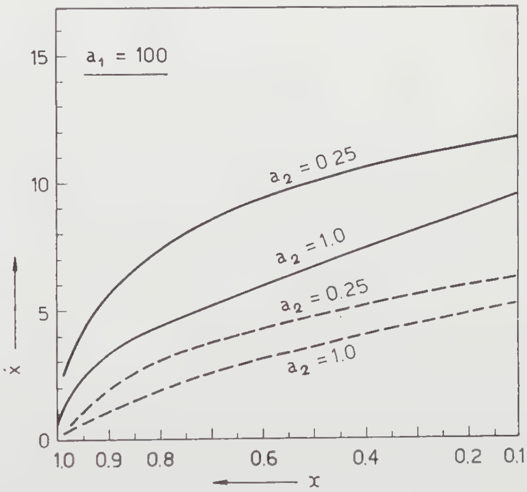

Fig. 4 The normalized velocity $\dot{x}$ as a function of x for $a_1 = 100$ and $a_2 = 1$ and $1/4$. Numerically computed results are represented by broken lines. Adiabatic approximation results are represented by solid lines.

The adiabatic approximation

Let us assume that the capacity of the condenser bank is infinite while the stored energy is finite. In that case Eq. (3) simplifies to $(\partial/\partial t)\,(LI_z)=0$ and as, by definition, $L\,I_z$ is equal to the magnetic flux φ associated with the current L_z, we have

$$L\,I_z = \text{constant} = \varphi_0. \qquad (12)$$

A first integral of Eq. (2) can always be shown to lead to the law of conservation of total energy of the electrodynamic system which, in the case of infinite capacity, can be written as [see Eq. (6)]

$$l\,MN\,(\partial R/\partial t)^2 + (\varphi_0^2/L) = (\varphi_0^2/L_0) \qquad (13)$$

where L_0 is the initial inductance. Thus, instead of two differential equations, we have now two algebraic equations, Eqs. (12) and (13), which give the velocity $\partial R/\partial t$ directly as a function of the changing L and therefore as a function of R. Thus,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 = \frac{\varphi_0^2}{L_0 M N l}\left[1-\frac{L_0}{L}\right]. \qquad (14)$$

It would be very useful if a similar method could be used even when C is finite. In such a case, the theorem of conservation of magnetic flux cannot be used and one must look for another and more general integral theorem. It can be shown that for $C\rightarrow 0$ one can use the adiabatic theorem for oscillators, Eq. (5). A necessary condition for the applicability of the adiabatic theorem is that

$$\left.\frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial t}\right| \ll f \qquad (15)$$

where $f=1/(2\pi\sqrt{L\,C})$. It follows that $f\rightarrow\infty$ as $C\rightarrow 0$ and Eq. (15) is therefore satisfied.

Let us assume that the condition Eq. (15) is satisfied. Then Eqs. (5) and (6) can be written as

$$W/f = W_0/f_0 \qquad (16)$$

$$W + \tfrac{1}{2}\,MN\,l\,(\partial R/\partial t)^2 = W_0 \qquad (17)$$

from which

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{W_0}{\frac{1}{2}\,MNl}\right)\left(1-\frac{f}{f_0}\right). \qquad (18)$$

Considering that $W_0=\frac{1}{2}\,Q_0^2/C$ and expressing Q in coulombs and C in farads, one has

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{Q_0}{\sqrt{10^{-7}\,M\,N\,l\,C}}\left[1-\frac{L_0^{\frac{1}{2}}}{[L_0+2\cdot10^{-9}\,l\ln(R_0/R)]^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (19\,\text{a})$$

or in terms of the dimensionless variables, Eq. (11), this can be written as*

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tau} = \sqrt{2\,a_1}\left[1-\left(1-\frac{\ln x}{a_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (19\,\text{b})$$

Comparison of rigorous solutions with those derived from the adiabatic approximation

In Figs. 2, 3, and 4 the quantity $\partial x/\partial\tau$, computed from Eq. (19b), is plotted as a function of x for the values of a_1 and a_2 used previously in the numerical computations. It is thus possible to compare the results obtained by means of the adiabatic approximation with the correct results obtained numerically.

Comparison makes it evident that the larger the value of a_1, the poorer is the agreement between the two, i.e. the larger is the error in the adiabatic approximation method. Let us find out whether this observation agrees with the range of validity predicted by the condition of adiabaticity and expressed by Eq. (15). This condition can also be written as

$$\frac{1}{f^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial t} < 1$$

where

$$f=\{(2\pi\sqrt{C})\,[L_0+2\cdot10^{-9}\,l\ln(R_0/R)]\}^{\frac{1}{2}}.$$

Using Eq. (19a) for $\partial R/\partial t$ and changing to the dimensionless variables [Eq. (11)], one gets:

$$\frac{1}{\sqrt{a_2}}\left[\frac{1}{F\,(x,a_2)}-\frac{1}{F^{\frac{3}{2}}\,(x,a_2)}\right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{x}{\sqrt{a_1}} \qquad (20)$$

where

$$F\,(x,a_2) = 1-[(\ln x)/a_2].$$

The left-hand and right-hand sides of this inequality can be plotted as functions $\psi_1(x)$ and $\psi_2(x)$, respectively, as shown schematically in Fig. 5. It appears that a suitable approximation of the inequality Eq. (20) can be derived if we demand that

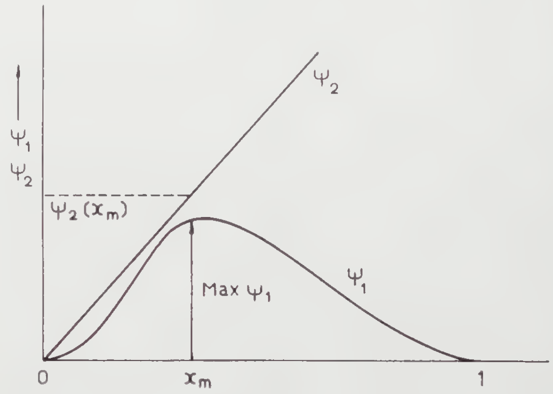

Fig. 5 Schematic representation of the form of $\psi_1(x)$ and $\psi_2(x)$.

$$\max\psi_1 < \psi_2\,(x_m) \qquad (21)$$

where x_m is the x coordinate of the maximum of ψ_1. This maximum is given by

$$\left[-F^{-2}+\tfrac{3}{2}\,F^{-\frac{5}{2}}\right]\frac{dF}{dx}=0$$

from which the maximum of F is $-9/4$ and

$$x_m = \exp\,(-\,5\,a_2/4). \qquad (22)$$

---

* For values $x\sim 1$ (i.e. $R\sim R_0$) the Eq. (19b) simplifies to

$$\dot{x} = (\sqrt{a_1/a_2})\,\sqrt{1-x}$$

which suggests that for plane geometry the problem could be specified by a single constant, namely a_1/a_2.

The relation (21) can, therefore, be written as

$$a_1 < (27/8\,\pi^2)\, a_2 \exp(-5a_2/2). \qquad (23)$$

As the right side of Eq. (23) is a maximum at $a_2 = 2/5$, then the highest admissible a_1 is

$$(a_1)_{\max} = 0.050. \qquad (24)$$

This is in agreement with the comparison of the adiabatic $\dot{x}(x)$ solution and the correct solution (Figs. 2, 3, 4).

From these figures it is also evident that the actual $\dot{x}$ oscillates about the smooth curve obtained by using the adiabatic approximation and the fewer these oscillations the larger is their amplitude, especially at the beginning of the acceleration process. Thus even though the criterion (23) may be satisfied, the error attributable to the oscillating nature of $\dot{x}$ in a narrow range of x near $x = 1$ is so large that in this range the adiabatic approximation is inapplicable.

This is understandable as the adiabatic theorem should not be applied in comparing states of an oscillator within the same half-cycle of an oscillation. Thus, as a supplementary criterion, we shall require that during the acceleration period, there is, at least, one current reversal. Hence, the processes described in Fig. 3 are near to the fulfillment of this criterion; those of Fig. 2 satisfy it well, whereas the conditions corresponding to Fig. 4 do not come anywhere near it.

Conclusion

It has been shown that the use of adiabatic theorem gives a good agreement with numerical solutions of the appropriate differential equations provided that

$$C^2\, V_0^2/(100\, MNR_0^2) < 0.05$$

where C_0, V_0 are capacitance (farads) and initial potential (volts) of the condenser bank, M the positive ion mass, N the linear density of ions and R_0 the initial mean radius (centimetres) of the cylindrical shell of plasma. An additional proviso is that the current flow in the cylindrical plasma layer reverses at least once before the layer reaches the axis of symmetry.

Even in case these criteria are not satisfied the adiabatic approximation gives a useful first estimate of the performance of cylindrical plasma guns as can be seen from the graphs of $\dot{x}(x)$ in Fig. 3 where $C^2\, V_0^2/(100\, MNR_0^2) = 1$ and not even one full reversal of current occurs.

Acknowledgement

I would like to thank CERN for the numerical calculations performed on their electronic computer and to Dr. T. Okhawa and Mr. Ch. Maisonnier for helpful discussions.

Appendix

It is interesting to apply the adiabatic approximation to the rail-type gun described by Artsimovich *et al.* [2]. Equations (16), (17) and (18) are applicable to the linear geometry giving

$$\dot{x}^2 = (W_0/\tfrac{1}{2}\,m)[1 - (f/f_0)] \qquad (\text{A } 1)$$

where $m = MN\,l$. The inductance is, however,

$$L = L_0 + b\,x$$

and using the notation of the Artsimovich article, i.e.

$$\tau = (1/\sqrt{L_0 C})\,t, \qquad y = x\,(b/L_0)$$

Eq. (A1) becomes

$$\dot{y} = \sqrt{2\,q}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{A } 2)$$

where

$$q = \frac{b^2\,(C\,V_0)^2}{2 \cdot 10^{-7}\, m\, L_0}.$$

This last expression differs by a numerical factor from that of Artsimovich on account of the system of units used here: C (farads), L (henries), V (volts), m (grams) and length in centimetres.

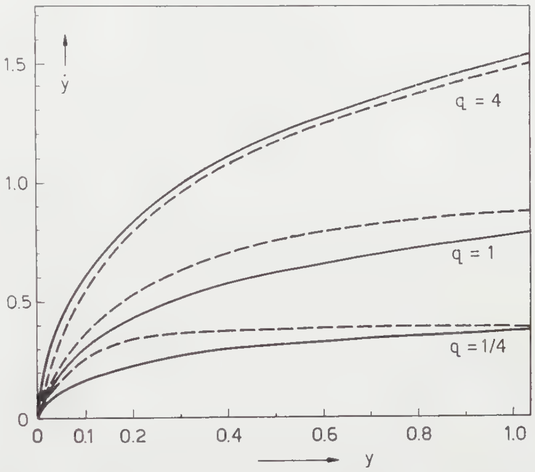

Fig. 6 Comparison between numerical computation (broken line) and adiabatic approximation (solid line) for a rail-type plasma gun.

In Fig. 6 are plotted the $\dot{y}(y)$ curves deduced from the solutions given by Artsimovich *et al.* of the corresponding differential equations and also, for the same q, the $\dot{y}(y)$ curves representing Eq. (A2). The agreement is encouraging.

References

[1] Linhart, J. G., *Nuovo Cimento* **17** (1960) 850

[2] Artsimovich, L. A., Lukianov, S. Y., Podgorny I. M., and Chuvatin, S. A., *Soviet Physics — JETP* **6** (1958) 1. Original paper in *Zhur. Eksptl' i Teoret. Fiz.* **33** (1957) 3

(Manuscript received on 2 August 1960)

ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ 1 (1961) 82-100

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ (I)

А. А. Веденов, Е. П. Велихов и Р. З. Сагдеев

Ордена Ленина Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова

Академии Наук СССР, Москва, СССР

Статья, в основном, представляет собой обзор ряда работ, посвященных теории нелинейных движений плазмы в условиях, когда столкновения между частицами не играют определяющей роли.

Во введении формулируется постановка задачи: об эволюции во времени начального возмущения конечной амплитуды. Возникающая физическая картина будет зависеть от конкуренции между процессами: нелинейного увеличения крутизны, дисперсии, поглощения и неустойчивости. В ряде случаев, когда поглощение и неустойчивость несущественны, можно получить представление о характере нелинейных движений, привлекая соответствующий линейный «закон дисперсии».

Вторая глава посвящена изложению некоторых частных типов нестационарных нелинейных движений, допускающих точное математическое решение: нелинейные колебания электронов при $T=0$, нелинейные движения плазмы поперек сильного магнитного поля, ионные волны конечной амплитуды в неизотермической плазме при $p_i \ll p_e$. В ряде случаев эволюция начального возмущения приводит к образованию многопотоковых течений, некоторые особенности которых обсуждаются в гл. 3. В четвертой главе описаны установившиеся нелинейные волны, т.е. волны, не меняющие своей формы во времени. В частном случае это так называемые «уединенные» волны, наподобие волн на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. Возможность существования таких волн требует линейные законы дисперсии определенного характера. Указывается на возможность «уединенных» волн разрежения. В пятой главе специально обсуждается вопрос о поглощении волн в разреженной плазме. Развивается приближенный «квазилинейный» метод, позволяющий упростить кинетическое рассмотрение поглощения волн конечной амплитуды.

Сущность метода заключается в том, что функция распределения $f(r, v, t)$ представляется в виде суммы быстро и медленно меняющихся частей. При этом в уравнении для медленно меняющейся части учитывается квадратичный усредненный эффект быстрых осцилляций. Метод применяется к двум частным задачам: о поглощении ленгмюровских электронных колебаний (в пределе очень малых амплитуд выражение для затухания волн переходит в известную формулу для так называемого «затухания Ландау»), о циклотронном поглощении поперечно поляризованных волн, распространяющихся вдоль постоянного магнитного поля.

В последней 6-ой главе указываются некоторые типы неустойчивости нелинейных движений. Кроме неустойчивостей многопотокового движения показана неустойчивость волн в магнитном поле (в частности, уединенных волн), если их амплитуда превышает некоторое критическое значение, тем меньшее, чем меньше температура плазмы.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие замечания 83
2. Некоторые частные случаи нестационарных нелинейных движений разреженной плазмы 85
  2.1 Электронные колебания «холодной плазмы» . . 85
  2.2 Движение плазмы поперек магнитного поля . . 86
  2.3 Движение «холодных» ионов в плазме без магнитного поля 86
3. Многоскоростные течения в разреженной плазме 87
4. Некоторые типы установившихся нелинейных движений 90
  4.1 Установившиеся ионные волны при $p_i \ll p_e$ . . 90
  4.2 Установившиеся магнитозвуковые волны конечной амплитуды, распространяющиеся поперек магнитного поля 91
5. Квазилинейное приближение 93
  5.1 Вывод уравнения квазилинейного приближения 93
  5.2 Поглощение волн в плазме 95
6. Устойчивость нелинейных движений в разреженной плазме 97
  6.1 Неустойчивости многопотокового движения . . 97
  6.2 Неустойчивости волн конечной амплитуды, распространяющихся поперек магнитного поля . 98
Литература 99

1. Общие замечания

Колебательным свойствам разреженной плазмы посвящена довольно обширная литература, в том числе и обзорного характера. Однако, как правило, в ней изучаются лишь линейные или малые колебания плазмы, т.е. такие, в которых характер движений не зависит от амплитуды колебаний [1—3].

В линейной теории колебательное движение плазмы представляет собой суперпозицию отдельных невзаимодействующих волн — гармоник ($\exp i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, где ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор).

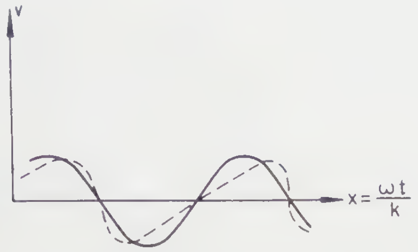

Рис. 1 Искажение формы звуковой волны из-за нелинейности.

Между ω и $\mathbf{k}$, вообще говоря, существует определенная связь — «закон дисперсии» ($\omega = \omega(\mathbf{k})$).

Ясно, что учет нелинейности колебаний может изменить картину движения, имеющую место в линейной теории. Обратимся к наглядной аналогии со звуковыми колебаниями в обычной газодинамике. Хорошо известно, что звуковые волны, гармонические в линейном приближении, из-за конечности амплитуды с течением времени искажаются (см. рис. 1). Эта деформация профиля звуковой волны математически описывается нелинейным членом в уравнении движения $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ в газовой динамике, отражающем тот факт, что участки профиля, которым соответствует большая скорость, стремятся опередить участки с меньшей скоростью. Если звук имеет достаточно большую амплитуду для того, чтобы подобный нелинейный эффект успел проявиться раньше, чем волна просто затухнет из-за теплопроводности и вязкости в газе, то в конце концов образуются разрывы. Разрывы в обычной газовой динамике (если не учитывать диссипативных процессов) заменяются математическими поверхностями, представляющими фронты ударных волн. На самом деле, фронт ударной волны представляет собой переходную область конечной толщины (в обычной газодинамике во всяком случае больше длины свободного пробега).

Теперь проследим за возможным искажением профиля какой-нибудь гармонической волны в разреженной плазме*. На эволюцию такой волны во времени будет влиять два фактора: 1) нелинейность, 2) поглощение. Рассмотрим сначала влияние нелинейности, предполагая поглощение малым.

Тенденция к увеличению крутизны переднего фронта из-за нелинейности сохраняется и в волнах в разреженной плазме (исключение составляют всякие волны с поперечной поляризацией, как например, альфвеновские магнитогидродинамические). Если в газовой динамике рост крутизны фронта ограничивается диссипативными эффектами, то в разреженной плазме главную роль могут играть эффекты дисперсии. В нашем примере с гармонической волной «конкуренцию» между нелинейностью, стремящейся опрокинуть волну, и дисперсией можно проиллюстрировать следующим образом. Увеличение крутизны переднего фронта на языке фурье-разложения означает рождение высших гармоник в волне под влиянием нелинейности. В первом (линейном) приближении всякая волна остается гармонической ($\exp i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$); во втором приближении должны появляться вторые гармоники (как это имеет место в звуковой волне). В разложении по амплитуде волны уравнение для поправки второго приближения примет вид

$$\mathcal{L}_0 f_2 = l f_1^2 \exp i(2\omega t - 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \qquad (1)$$

Здесь f — отклонение какой-либо величины, характеризующей плазму или поле, от равновесного значения (индексы 1, 2 означают первое и, соответственно, второе приближения); $\mathcal{L}_0$ — линейный оператор, соответствующий линейным колебаниям плазмы с каким-то законом дисперсии $\omega = \omega(\mathbf{k})$. В известном смысле уравнение (1) имеет вид уравнения движения «осциллятора» под действием вынуждающей силы $\sim f_1^2$. Ясно, что вторая гармоника будет возбуждаться, если эта сила находится в «резонансе» с «собственной частотой» осциллятора, т.е. если удвоенной исходной частоте 2ω соответствует (в законе дисперсии) волновой вектор, равный 2 к. Такой «резонанс», вообще говоря, будет осуществляться лишь для линейного закона дисперсии $\omega = ck$, как это и имеет место в обычном звуке. Для произвольного закона дисперсии, вообще говоря, уже не будет перекачки энергии основной гармоники во вторую и т.д., если «вынуждающая сила» находится далеко от «резонанса». Такая качественная иллюстрация показывает, что периодические** волны в плазме в области частот, где существенно отклонение от линейного закона дисперсии, могут распространяться без искажения своей формы из-за нелинейности. Зная ход дисперсионных кривых $\omega = \omega(\mathbf{k})$ из теории линейных колебаний плазмы, можно таким образом предвидеть некоторые общие свойства нелинейных движений. Пусть, например, речь идет о магнитозвуковых колебаниях, распространяющихся поперек магнитного поля в холодной плазме. При частотах, меньших ω_{Hi} — ларморовской частоты ионов, фазовая скорость таких колебаний с большой точностью равна $H_0/\sqrt{4\pi\varrho_0}$ (H_0 — невозмущенное магнитное поле, ϱ_0 — массовая плотность невозмущенной плазмы). С ростом частоты фазовая скорость начинает уменьшаться и при приближении к частоте, равной средней геометрической из ионной и электронной $(\omega_{Bi}\ \omega_{He})^{\frac{1}{2}}$ обращается в нуль.

---

* В отличие от звука в обычном газе такая постановка задачи для плазмы сложнее, так как в плазме может существовать несколько различных типов колебаний (колебательных «ветвей»). Так при наличии постоянного магнитного поля возможны семь разных ветвей.

** Особый тип недеформирующихся волн представляет собой так называемые «уединенные волны», где дисперсия также играет важную роль. Для существования таких волн необходим специфический вид закона дисперсии (см. § 4).

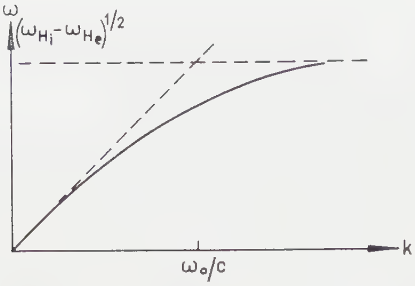

Рис. 2 Зависимость частоты от волнового вектора для магнитозвуковых колебаний.

Дисперсионная кривая для этого типа колебаний изображена на рис. 2.

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{H_0^2}{4\pi\varrho_0}\,\frac{\omega_0^2/c^2}{k^2 + \omega_0^2/c^2}\,;$$
$$\omega_0^2 = 4\pi n e^2/m\,. \tag{2}$$

Отклонения от линейного закона дисперсии начинают существенно проявляться при $k \to \omega_0/c$. Величина c/ω_0 и будет характерным пространственным масштабом для установившихся нелинейных магнитозвуковых волн (см. § 4).

В отсутствие магнитного поля ионные звуковые колебания в разреженной плазме, как известно, имеют смысл в линейной теории [3], если давление электронов значительно превышает давление ионов $p_e \gg p_i$. Такие условия реализуются, например, в неизотермической плазме, когда температура электронов значительно превышает ионную. Если для простоты принять ионы «холодными» ($T_i = 0$), то закон дисперсии будет подобным (2)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_e}{M}\,\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + k^2}\,,$$
$$\varkappa^2 = \Omega_0^2\,M/T_e, \quad \Omega_0^2 = 4\pi n e^2/M\,. \tag{3}$$

Роль характерного масштаба здесь играет дебаевский радиус $1/\varkappa$.

Наконец, колебания электронов в «холодной» плазме без магнитного поля имеют в качестве дисперсионного соотношения просто $\omega^2 = \omega_0^2$. Здесь нет никакого характерного масштаба и можно сконструировать установившиеся нелинейные волны любого пространственного периода [5]. Для нелинейных движений холодной электронной плазмы решается точная одномерная задача при произвольных начальных и граничных условиях, если амплитуда не слишком велика [6] (см. также § 2).

Итак, в отличие от обычной газовой динамики, где причиной, ограничивающей на некотором этапе дальнейший рост крутизны фронта нелинейных движений, являются диссипативные процессы, в разреженной плазме такой причиной могут являться дисперсионные эффекты.

Отличие между этими двумя группами эффектов находит свое отражение в математической структуре исходных уравнений. Диссипативные эффекты (вязкость, теплопроводность и т.п.) нарушают их обратимость — увеличивают порядок производных на нечетное число (как, например, вязкость добавляет к уравнению Эйлера в газодинамике члены со вторыми производными). Дисперсионные эффекты не нарушают обратимости и увеличивают порядок дифференцирования в уравнениях на четное число.

До сих пор рассуждения проводились для конечной, но малой амплитуды волн. Для волн с достаточно большой амплитудой может осуществиться совершенно иная ситуация. Дисперсионные эффекты могут оказаться недостаточными для ограничения роста крутизны, и фронт при амплитудах, превышающих некоторое критическое значение, может «опрокинуться». Возникают области многоскоростного течения (§ 3) (разумеется, это имеет смысл по отношению к первоначально холодной плазме).

Разреженной плазме присущи, в отличие от газодинамической среды, и свои специфические эффекты поглощения волн (как, например, «затухание Ландау» [8]. Из линейной теории [9—10] известно, что такого рода эффекты связаны с определенной группой частиц из распределения по скоростям, которые резонансным образом взаимодействуют с электрическим и магнитным полем волны. Такими частицами являются, например, частицы, движущиеся со скоростями, близкими к фазовой скорости волны $v - (\omega/k) = 0$, или частицы, в системе координат которых частота волны близка к циклотронной частоте $v - [(\omega - \omega_H)/k] = 0$. Обмен же энергией между плазмой и полем волны существенно зависит от локального поведения функций распределения частиц (ионов, электронов) в окрестности таких «резонансных» скоростей. Нелинейности существенно влияют на вид функции распределения в этих «точках» (так называемое явление искажения «фона» — равновесной функции распределения)*. Линеаризованная же теория не описывает этого эффекта. Поэтому она справедлива лишь тогда, когда столкновения успевают восстановить равновесное распределение частиц по скоростям. Это накладывает ограничение на амплитуду волны, затухание которой может быть еще описано линейной теорией (см. § 5). Некоторым усовершенствованием линеаризованной теории является так называемая «квазилинейная» теория (§ 5), которая принимает во внимание роль малых нелинейных эффектов лишь «однажды» — учитывает искажение «фона». Формально метод получения квазилинейных уравнений напоминает известный метод Ван-дер-Поля из нелинейной теории колебаний. Функция распределения представляется в виде суммы двух частей: медленно искажающегося «фона» $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и быстро осциллирующей части $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, удовлетворяющей линеаризованному кинетическому уравнению. В уравнении же для f_0 удерживаются усредненные квадраты быстро осциллирующих величин. С помощью уравнений квазилинейного приближения можно найти поглощение волн с учетом «искажения фона».

---

* Наглядным примером тому может служить существование нелинейных незатухающих волн в плазме, где искажение «фона» выражается в появлении так называемых «захваченных» частиц.

Даже такая далеко не тривиальная картина эволюции начального возмущения в плазме, в которой все определяется конкуренцией между нелинейным «опрокидыванием», дисперсией и поглощением, может еще более усложниться, если принять во внимание возможные неустойчивости. В § 6 мы приведем простые примеры неустойчивостей, которые присущи нелинейным волнам, когда их амплитуда превышает некоторое критическое значение.

2. Некоторые частные случаи нестационарных нелинейных движений разреженной плазмы

При наложении известного числа ограничений удается получить точные решения для некоторых типов нестационарных нелинейных движений разреженной плазмы.

Самый общий подход к описанию ее поведения основан на применении кинетических уравнений (с учетом самосогласованных электрического и магнитного полей) для функций распределени $f_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ионов и электронов по скоростям ($\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{r}$ — пространственная координата, t — время).

2.1 ЭЛЕКТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ «ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ»

Если не учитывать движения ионов (т.е. рассматривать колебания с большими частотами) и пренебрегать тепловым разбросом скоростей электронов, то оказывается одномерная задача допускает простое точное решение [6].

В этом случае все электроны в данной точке имеют одну и ту же скорость, удовлетворяющую уравнению движения*

$$m\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -eE\,. \tag{4}$$

Плотность электронов определяется из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nv)}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

и, наконец, для поля имеет место уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi (n - N_0)\,e\,, \tag{6}$$

где N_0 — плотность ионов.

Систему уравнений (4)—(6) можно привести к простому виду, если использовать Лагранжевы переменные a, t, где a — начальная координата электрона, находящегося в точке x в момент времени t. Действительно, уравнения движения, непрерывности и Пуассона записываются в этих переменных следующим образом:

$$m x_{tt} = -eE \tag{4'}$$

$$n x_a = n_0(a) \tag{5'}$$

$$E_a = x_a \cdot 4\pi\,(N_0 - n)\,e \tag{6'}$$

(индекс означает дифференцирование по соответствующей независимой переменной). Дифференцируя (4′) по a и исключая E_a и n с помощью (6′) и (5′), получим осцилляторное уравнение для x:

$$x_{tt} + \omega_0^2 x = \varphi(a), \tag{7}$$

где

$$\omega_0^2 = 4\pi N_0\, e^2/m, \qquad \varphi(a) = \int da\, 4\pi\, n_0(a)\, e^2/m,$$

или

$$\xi_{tt} + \omega_0^2\,\xi = 0, \qquad \xi = x + \varphi(a)/\omega_0^2. \tag{8}$$

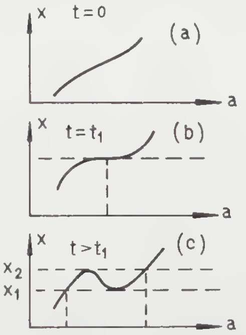

Рис. 3 Смещение частицы в нелинейных ленгмюровских колебаниях.

Нелинейные движения электронов в холодной плазме сводятся, таким образом, к гармоническим колебаниям с ленгмюровской частотой ω_0. Задавая, например, начальные условия для скорости и плотности электронов, можно с помощью (8) найти их движение во все последующие моменты времени в произвольной точке пространства. При этом, однако, следует иметь в виду следующее обстоятельство. При выводе (8) мы предполагали, что Лагранжева координата x каждого электрона является однозначной функцией его начальной координаты a (рис. 3a). Если же, например, начальные скорости электронов сильно меняются в пространстве (в зависимости от a), то по истечении некоторого промежутка времени t_1 некоторые электроны смогут догнать (рис. 3b), а затем и перегнать (рис. 3c) своих соседей, так что в некоторой области пространства $x_1 < x < x_2$ в каждой точке x будут находиться три группы электронов, движущиеся с различными скоростями и имевшие в начальный момент времени разные координаты a_1, a_2, a_3. Уравнение (8), как и исходная система (4)—(6), описывает лишь односкоростное течение, имеющее место в рассмотренном случае лишь для $t < t_1$; это связано с тем, что при написании исходных уравнений (4)—(6) предполагалось, что в каждой точке пространства в данный момент времени все электроны движутся с одной и той же скоростью. Для описания многоскоростного течения, возникающего при $t > t_1$, необходимо рассмотреть систему уравнений движения и непрерывности для каждой из групп электронов, находящихся в данной точке x, с учетом уравнения Пуассона, в котором в качестве электронной плотности следует писать сумму плотностей всех электронных потоков.

---

* Для простоты ограничимся одномерным плоским случаем.

Исследование такой системы весьма сложно; рассуждая наивно, можно, однако, считать, что возникшие после «пересечения» траекторий взаимопроникающие потоки электронов имитируют в известном смысле «тепловой» разброс скоростей, т.е. произошла диссипация энергии упорядоченных колебаний в тепловую*. Аналитическое исследование характера возникающего многопотокового движения представляет большие трудности.

2.2 ДВИЖЕНИЕ ПЛАЗМЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В этом случае также возникают большие упрощения, если ларморовские радиусы ионов и электронов достаточно малы. Плазму можно рассматривать тогда, как совокупность «квазичастиц» — ларморовских кружков с адиабатически сохраняющимися магнитными моментами $\mu = \varepsilon_\perp / H$ ($\varepsilon_\perp$ — энергия ларморовского вращения заряда вокруг силовой линии магнитного поля). Если, кроме того, пренебречь инерцией электронов и считать плазму квазинейтральной, то исходную систему кинетических уравнений без столкновений и уравнений Максвелла можно строго свести (для движения, перпендикулярного силовым линиям магнитного поля) к виду, напоминающему систему уравнений магнитогазодинамики с показателем адиабаты $\gamma = 2$. Например, для плоского одномерного движения

$$\begin{gathered}
\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{H^2}{8\pi} \\
\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial (H/\varrho)}{\partial t} + v\frac{\partial (H/\varrho)}{\partial x} = 0 \\
p = p_0 \cdot (\varrho/\varrho_0)^2
\end{gathered} \tag{9}$$

(здесь ϱ — массовая плотность, p — давление, $p = H\int \mu f \, dv$).

С помощью системы (9) нетрудно проследить за развитием произвольного начального возмущения в плазме поперек магнитного поля. Так, возмущения малой амплитуды (т.н. магнитный звук) распространяются со скоростью

$$\left(\frac{\partial p^*}{\partial \varrho}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{H_0{}^2}{4\pi\varrho_0} + \gamma\frac{p_0}{\varrho_0}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \left(p^* = \frac{H^2}{8\pi} + p\right).$$

Нелинейное искажение формы профиля возмущения нагляднее всего иллюстрируется для одного важного частного случая, когда начальное распределение давления, магнитного поля, скорости и плотности таково, что любые три из этих величин можно представить как функции четвертой. Как известно, в обычной газовой динамике в аналогичном случае существует решение Римана, описывающее так называемую простую волну произвольной амплитуды. Зависимость скорости от времени и координаты в этом решении определяется неявной функцией

$$x = t\,[v \pm c\,(v)] + \chi\,(v), \tag{10}$$

где $c^2(v) = (dp^*/dv)/(dp/dv)$, а $\chi(v)$ — функция, зависящая от начальных условий. Согласно (10) профиль течения будет деформироваться так, что, начиная с некоторого момента, решение становится трехзначным. На самом же деле еще до этого исходные уравнения на некотором этапе становятся неприменимыми, т.к. нарушится хотя бы одно из предположений, использованных при получении системы (9). Для случая разреженной холодной ($p \ll H^2/8\pi$) плазмы появляются эффекты дисперсии (см. (2). Характер возникающих установившихся** течений подробно обсуждается в § 4.

2.3 ДВИЖЕНИЕ «ХОЛОДНЫХ» ИОНОВ В ПЛАЗМЕ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В разреженной плазме, в которой выполняется условие $p_i \ll p_e$, как известно из линейной теории, могут распространяться продольные «ионные» звуковые колебания с дисперсионным уравнением (3). Так как фазовая скорость ω/k таких волн значительно превышает среднюю тепловую скорость ионов, то разумно пренебречь разбросом их скоростей. С другой стороны в таких волнах ω/k значительно меньше тепловых скоростей электронов. Поэтому электрическое поле волны по отношению к электронам будет квазистатическим. Тогда, если в области, где электрический потенциал φ максимален, распределение электронов по скоростям является максвелловским $f \sim \exp(-mv^2/2T)$, то плотность электронов в любом месте будет описываться распределением Больцмана $n = n_0 \times$

---

* Интересный модельный анализ «многопотокового» движения электронов, возникающего после «пересечения» траекторий, проводился с помощью вычислительных машин О. БУНЕМАНОМ [7] и ДЖ. ДАУСОНОМ [6]. Результаты расчетов показывают, что действительно имеет место диссипация.

** В обычной газовой динамике (с малой длиной свободного пробега) в подобной ситуации возникает установившееся течение с разрывом (ударной волной). На основе описанной математической аналогии и возникла гипотеза о возможности бесстолкновительной ударной волны в разреженной плазме.

$\exp(e\varphi/T)$.* При сделанных предположениях одномерное плоское движение будет описываться системой уравнений

$$M\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -e\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v)}{\partial x} = 0$$
$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e\left(n_i - n_0 e^{e\varphi/T}\right). \qquad (11)$$

Здесь M, v, n_i — масса иона, скорость и плотность ионов соответственно. Для движений с характерным масштабом, значительно превышающим дебаевский радиус $(T/4\pi n_0 e^2)^{\frac{1}{2}}$, можно считать плазму квазинейтральной $n_i = n_0 \exp \pi\,\varphi/T = n$ (то есть в последнем уравнении системы (11) опустить член $\partial^2\varphi/\partial x^2$). Тогда, исключив из уравнений электрическое поле, получим

$$M\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{T}{n}\,\frac{\partial n}{\partial x}$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (n v)}{\partial x} = 0\,. \qquad (12)$$

(12) по форме совпадает с уравнениями изотермического движения ($\gamma = 1$) обычной газовой динамики. И здесь фронт, вообще говоря, любого начального возмущения с течением времени будет становиться все круче и круче до тех пор, пока не «опрокинется». Однако, прежде чем решение станет многозначным, нарушится условие применимости допущения о квазинейтральности, когда по мере роста крутизны характерный масштаб уменьшится до дебаевского радиуса. Эффект разделения заряда приводит к дисперсии (см. формулу (3)) и можно ожидать установившихся движений с масштабом порядка дебаевского радиуса.

3. Многоскоростные течения в разреженной плазме

В разреженной плазме могут осуществляться течения, при которых в некоторой области пространства в каждой точке имеются две или более группы частиц, движущихся с различными макроскопическими скоростями. При достаточно малой плотности плазмы среднее время между столкновениями частиц велико и поэтому силы трения между различными потоками пренебрежимо малы. Взаимное влияние частиц, принадлежащих к различным потокам, определяется в этом случае исключительно самосогласованным электрическим и магнитным полем, созданным зарядами и токами частиц всех групп, находящихся в данной точке пространства. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые случаи таких многоскоростных течений.

*1. Обратимся сначала к случаю, когда внешнее магнитное поле в плазме направлено вдоль потока. При сильном неравенстве электронной и ионной температур $T_e \gg T_i$** и выполнении условий квазинейтральности $n_e = n_i$ распространение «ионного звука» описывается системой уравнений изотермической газодинамики* (12).

Если мы попытаемся теперь с помощью (12) решить задачу о движении, вызываемом в плазме движущимся бесконечным поршнем***, то в случае малой скорости поршня U мы найдем, что возникающее возмущение представляет собой бегущую от поршня ионную звуковую волну, распространяющуюся со скоростью c, а скорость частиц в волне равна скорости поршня с учетом запаздывания: $v = U\,(x - ct)$. Эта картина совпадает с соответствующей картиной в случае газодинамики. Однако если мы будем увеличивать скорость поршня, то эта аналогия между плазмой и газодинамикой исчезнет. Если в газодинамическом случае диссипативные эффекты приводят к возникновению ударной волны, то в разреженной плазме, где отсутствуют заметные силы трения, при большой скорости поршня вблизи него возникает область двухскоростного течения, граничащая с областью односкоростного течения. В рассматриваемом нами случае две группы ионов, движущиеся с различными скоростями, возникают в разультате отражения от поршня; электроны же, являющиеся односкоростными, двигаются так, чтобы компенсировать положительный пространственный заряд ионов.

В области двухскоростного течения систему (12) нужно заменить следующей системой уравнений, описывающих движение двух потоков ионов:

$$v_t^{(\alpha)} + v^{(\alpha)}\,v_x^{(\alpha)} = -c^2\nabla_x \ln \sum_{\alpha=1}^{2} n^{(\alpha)}\,,$$
$$n_t^{(\alpha)} + \left(n^{(\alpha)}\,v^{(\alpha)}\right)_x = 0\,, \qquad \alpha = 1,2 \qquad (13)$$

с граничным условием зеркального отражения на прошне, движущемся со скоростью U:

$$v^{(1)} - v^{(2)} = 2\,U, \qquad n^{(1)} = n^{(2)} \text{ при } x = \int U\,dt. \qquad (14)$$

В случае равномерного движения поршня со скоростью U, плотности и скорости потоков в двухскоростной области определяются следующими выражениями (удовлетворяющими, как легко проверить, системе (13)—(14)): $n^{(1)} = n^{(2)} = n$; $v^{(1)} = 2\,U$, $v^{(2)} = 0$, где n — плотность плазмы в области покоящейся плазмы 1 (рис. 4). Граница между областями покоя 1 и двухскоростного течения 2 движется с удвоенной скоростью поршня $2\,U$. Скорость электронов в области 1 равна U, а их плотность — $2n$; поэтому скачок электростатического потенциала между областями 1 и 2 равен:

---

* Это соответствует учету так называемых «захваченных» электронов, поскольку максимум φ отвечает «дну» потенциальной ямы (минимуму потенциальной энергии электронов). «Захват» же электронов потенциальной ямой в общем случае определяется столкновениями. В этом разделе мы предполагаем, что частота столкновений электронов достаточно велика для того, чтобы было применимо распределение Больцмана.

** Часто реализующегося в экспериментальных установках.

*** Роль поршня в случае разреженной плазмы может играть, например, сильное магнитное поле, которое включается на границе плазмы и параллельно этой границе.

$$\Delta\varphi = (T/e)\ln 2$$

Исследование устойчивости двухскоростного течения показывает, что малые флуктуации в области 2 экспоненциально нарастают лишь в случае, когда скорость относительного движения двух ионных потоков меньше c; в противоположном случае двухскоростное течение устойчиво.

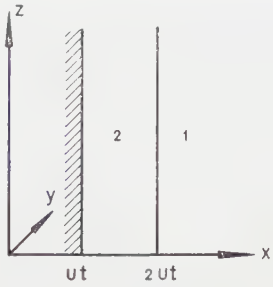

Рис. 4 Двухскоростное течение перед поршнем.

Другим примером, приводящим к возникновению многоскоростного течения, является задача об «опрокидывании» профиля ионно-звуковой волны большой амплитуды. Если мы рассмотрим случай простой (римановской) ионно-звуковой волны, которая описывается формулой (10) с $c(v) = (T_e/M)^{\frac{1}{2}} = \text{const}$, то момент „опрокидывания" волны определится условиями

$$\partial x/\partial v = \partial^2 x/\partial v^2 = 0\,, \text{ т.е. } t = -\chi'(v)\,,\ \chi''(v) = 0\,.$$

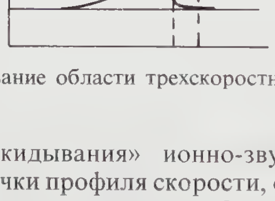

Рис. 5 Образование области трехскоростного течения.

После «опрокидывания» ионно-звуковой волны вблизи той точки профиля скорости, около которой произошло опрокидывание, образуется область трехскоростного течения, т.е. возникают три потока ионов, движущиеся с различными скоростями. Эта область 2 (см. рис. 5) граничит с двумя областями 1 и 3 односкоростного течения. В областях 1 и 3 движение ионов плазмы описывается системой уравнений (12), а в области 2 — системой (13) (индекс α, нумерующий потоки, принимает в этом случае значения 1, 2, 3).

В случае ионно-звуковых волн очень большой амплитуды $v \gg c$ (число Маха $M \equiv v/c \gg 1$) (10) переходит в уравнение, описывающее свободное движение частиц:

$$x = vt + \chi(v)\,.$$

Это уравнение описывает как односкоростное течение (до опрокидывания), так и движение после опрокидывания, когда появляется трехскоростная область, изменяющаяся с течением времени.

В заключение настоящего раздела следует заметить, что использованное выше предположение о квазинейтральности плазмы оказывается неверным в случае, когда имеются большие градиенты величин, характеризующих движение плазмы. В этом случае нужно пользоваться системой уравнений (11), учитывающей отклонение от квазинейтральности, или аналогичной системой для многоскоростной задачи.

Если, например, в начальный момент времени мы создадим в плазме возмущение с характерным размером, значительно меньшим дебаевского радиуса $D = \sqrt{T/4\pi n e^2}$, то плотность электронов n можно считать постоянной (поскольку дебаевское экранирование имеет место лишь на расстояниях, много бóльших D). В этом случае удобно описывать движение ионов в лагранжевых переменных a, t. Используя уравнения движения ионов

$$M x_{tt} = eE\,,$$

непрерывности

$$N x_a = N_0(a)$$

и Пуассона

$$E_a/x_a = 4\pi e\,[N - n(a)]\,,$$

получим для координаты ионов $x(a, t)$ осцилляторное уравнение

$$(x_a)_{tt} + \Omega^2(a)\,x_a = 4\pi\,N_0(a)\,e^2/M\,, \tag{15}$$

отличающееся от (8) лишь тем, что вместо электронной лэнгмюровской частоты ω_0 в рассматриваемом случае входит ионная лэнгмюровская частота $\Omega = \sqrt{4\pi n(a) e^2/M}$. Из (15) следует, что аналогично случаю электронных лэнгмюровских колебаний при достаточно большой начальной амплитуде возникает «пересечение траекторий» ионов, приводящее к появлению многоскоростной области.

2. Перейдем теперь к рассмотрению многоскоростных течений в разреженной плазме при наличии в ней магнитного поля; при этом мы будем изучать лишь движения плазмы поперек магнитного поля.

Одним из простейших примеров многоскоростного течения при наличии магнитного поля является задача* о движении плазмы под действием поршня, перемещающегося перпендикулярно силовым линиям магнитного поля с постоянной скоростью W, много большей альфвеновской скорости

---

* Рассмотренная М. А. ЛЕОНТОВИЧЕМ совместно с одним из авторов.

$V_A=\sqrt{H^2/4\pi\, n\, M}$. Вследствие отражения ионов плазмы от поршня (который в действительности может представлять собой область сильного магнитного поля), вблизи него возникает область 1 двухскоростного движения ионов, граница которой движется со скоростью U. В то же время электроны, из-за малой массы, совершают дрейфовое движение, так что их течение является односкоростным. На движущейся границе областей двухскоростного и односкоростного течений ставятся условия непрерывности потоков вещества, энергии и импульса.

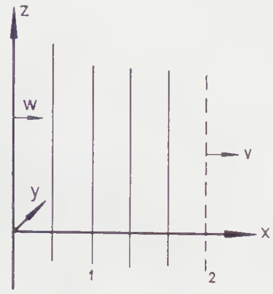

Рис. 6 Двухскоростное течение поперек магнитного поля.

Система уравнений двухскоростной магнитной газодинамики в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\partial u^\alpha/\partial t+u^\alpha\, \partial u^\alpha/\partial x=\Omega_H\,(v^\alpha-v)\;-\;V_A{}^2\,\partial \ln H/\partial x,\\
&\partial v^\alpha/\partial t+u^\alpha\, \partial v^\alpha/\partial x=-\,\Omega_H\,(u^\alpha-u), \qquad (16)\\
&\partial n^\alpha/\partial t+\partial\,(n^\alpha u^\alpha)/\partial x=0.
\end{aligned}$$

$n^\alpha,\ u^\alpha,\ v^\alpha$ — плотность и компоненты скорости (вдоль осей x, y) для ионов потока α ($\alpha=1, 2$);

$n=\sum\limits_\alpha n^\alpha$ — полная плотность ионов (равная плотности электронов);

$u=\sum\limits_\alpha n^\alpha u^\alpha/n,\qquad v=\sum\limits_\alpha n^\alpha v^\alpha/n$ —скорости электронов вдоль осей x, y

$\Omega_H=e\,H/M_i c,\qquad V_A{}^2=H^2/4\pi\, n\, M_i.$

Разложением в ряд по малому параметру, равному отношению альфвеновской скорости $V_A{}^0$ к скорости поршня W (т.е. обратному числу Маха $1/M=V_A{}^0/W\ll 1$), было найдено решение системы (16) с соответствующими граничными условиями на поршне и на границе с областью покоя 2.

Это решение справедливо для начальной стадии движения

$$(\Omega_H\, t/M)^2\ll 1$$

Оказывается, что на границе одно- и двухскоростной областей имеется скачок магнитного поля (и плотности), равный

$$H_1-H_0=H_0,$$

а сама граница движется со скоростью

$$U=2\,W$$

(с точностью до членов высшего порядка по $1/M$).

Распределение характеризующих движение плазмы величин в области двухскоростного течения можно найти с помощью следующего наглядного рассуждения. В первом приближении по $1/M$ проекции скорости ионов первого и второго потоков на ось равны:

$$u_1=0,\quad u_2=2\,W. \qquad (17)$$

Плотности ионов в этих потоках равны между собой и совпадают с плотностью ионов в невозмущенной плазме. Для выполнения условий квазинейтральности необходимо, чтобы в области двухскоростного течения 1 электроны (плотность которых равна в этой области n) двигались со скоростью W. Магнитное поле, пропорциональное плотности электронов, в области 1 вдвое превышает поле в невозмущенной плазме H_0. Заметим теперь, что движение электронов с постоянной скоростью W поперек магнитного поля напряженности $2\,H_0$ возможно лишь при наличии постоянного электрического поля $E_y=(1/c)\,W\cdot 2\,H_0$; это электрическое поле, действуя после прохождения границей данной точки x на ионы, находившиеся ранее в покое, придает им за время $t-(x/2\,W)$ скорость в направлении оси y, равную

$$v^1=\left(t-\frac{x}{2\,W}\right)\frac{e}{M_i}\,E_y=\Omega_H\,(2\,W\,t-x)\,. \qquad (18а)$$

При рассмотрении ионов второго потока следует учесть, что они в течение времени $t_2=(x/W)-t$ двигались вдоль оси x со скоростью $2\,W$, а до этого в течение времени $t_1=t-(x/2W)$ их скорость u^1 была равной нулю, и все время t_1+t_2 на них действовало поле E_y. Поэтому проекция скорости ионов второго потока на ось y равна

$$\begin{aligned}
v^2&=t_1\,\frac{e}{M_i}\,E_y+t_2\left(\frac{e}{M_i}\,E_y-\frac{2\,W}{c}\,\frac{e}{M_i}\,2\,H\right)\\
&=\Omega_H\,(4wt-3x)\,. \qquad (18б)
\end{aligned}$$

Выражения для скоростей, определяющиеся формулами (17)—(18), представляют собой первые члены разложения решения системы (16) по обратным степеням числа Маха.

Мы видим таким образом, что задача о поршне, приводящая в условиях обычной и магнитной газовой динамики к появлению ударных волн, имеет в разреженной плазме качественно иное решение: при больших скоростях поршня возникает область двухскоростного течения, ограниченная поршнем и односкоростной областью.

Исследование волн большой амплитуды, распространяющихся в разреженной плазме поперек магнитного поля, также указывает на возможность «опрокидывания» профиля волны и возникновения трехскоростной области. Для движений с характерным пространственным масштабом L, значительно превышающим $\lambda_0=c/\omega_0$ (где ω_0 — электронная лэнгмюровская частота) уравнения, описывающие распространение такой поперечной «магнитозвуковой» волны, совпадают, как отмечалось в § 2, с уравнениями газодинамики с $\gamma = 2$; если же L становится порядка λ_0, задача усложняется. Однако при большой амплитуде волны и в этом случае имеет место «пересечение траекторий» и образование многоскоростного течения.

Особенно просто описывается процесс опрокидывания в лагранжевых координатах в случае $L \ll \lambda_0$. При этом уравнение движения частиц

$$x_{tt} = \frac{e}{M} E(a)$$

показывает, что имеет место равноускоренное движение с ускорением, определяющимся начальным распределением магнитного поля.

В заключение этого раздела заметим, что, хотя для системы уравнений многоскоростного течения типа (13) или (16) можно найти ряд частных, автомодельных или стационарных решений*, исследование общей задачи о многоскоростном течении связано со значительными трудностями.

4. Некоторые типы установившихся нелинейных движений

Установившиеся нелинейные волны различных типов в плазме без затухания исследовались многими авторами. Стандартная процедура получения таких решений заключается в том, что в исходных уравнениях выбирают систему координат, движущуюся вместе с волной. В такой системе отсчета пропадает зависимость от времени и задача сводится к отысканию стационарного течения. Скорость волны u сначала входит в задачу как свободный параметр. Затем из условия разрешимости определяются границы, внутри которых может меняться u, а также связь u с амплитудой волны.

Остановимся на некоторых конкретных типах установившихся волн.

4.1 УСТАНОВИВШИЕСЯ ИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ $p_i \ll p_e$

Здесь будет идти речь об установившихся движениях, описывающихся системой уравнений (11). Приняв, что все величины зависят от x и t только в комбинации $\xi = x - ut$, систему (11) можно свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка для потенциала φ

$$\varphi'' = 4\pi\, n_0\, e\, [u/\sqrt{u^2 - 2e\varphi/M} - \exp(e\varphi/T)] \qquad (19)\ **$$

Интегрируя (19) один раз, получим

$$-\tfrac{1}{2}(\varphi')^2 = 4\pi n_0 e \left(-\frac{uM}{e}\sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}} - \frac{T}{e}\exp\frac{e\varphi}{T}\right) + C\,. \qquad (20)$$

В зависимости от выбора константы интегрирования C можно сконструировать различные периодические волны (см. интегральные кривые на фазовой плоскости рис. 7).

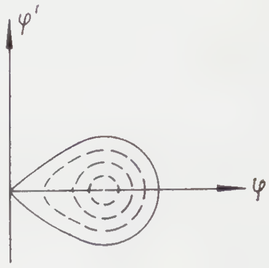

Рис. 7 Интегральные кривые на фазовой плоскости.

Особый случай представляет C, выбираемое из условия $\varphi' \to 0$ при $\varphi \to 0$, т.е. $C = 4\pi n_0 (Mu^2 + T)$***. На фазовой плоскости этот случай выделен особо. Он соответствует так называемой уединенной волне (рис. 8), представляющей собой симметричный «горб» потенциала.

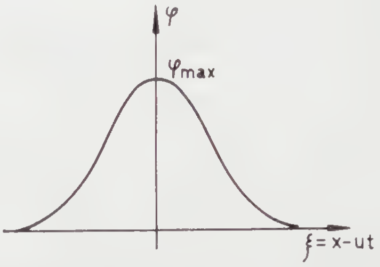

Рис. 8 Уединенная ионно-звуковая волна.

Скорость распространения такой волны u как функцию $\varphi_{\max}$-амплитуды потенциала, найдем из (20), полагая $\varphi' = 0$ при $\varphi = \varphi_{\max}$

$$u^2 = \frac{T}{2M}\,\frac{[\exp(e\varphi_{\max}/T) - 1]^2}{\exp(e\varphi_{\max}/T) - 1 - (e\varphi_{\max}/T)}\,. \qquad (21)$$

В предельном случае малых амплитуд ($e\varphi_{\max} \ll T$) u стремится к скорости изотермического звука ($\sqrt{T/M}$). При больших амплитудах ($e\varphi_{\max} \gg T$) $u \approx \frac{1}{2}\sqrt{T/M}\exp(e\varphi_{\max}/T)$. Для малых амплитуд профиль потенциала в уединенной волне имеет вид

$$\varphi \approx \frac{3}{2}\frac{T}{e}\left(1 - \frac{T}{Mu^2}\right) \times \operatorname{sech}^2\left\{\frac{\sqrt{\pi n_0 e}}{\sqrt{T}}\sqrt{1 - \frac{T}{Mu^2}}\,(x - ut)\right\}. \qquad (22)$$

---

* Система уравнений [13] имеет, например, класс решений типа простых (РИМАНОВСКИХ) волн, в которых величины связаны между собой функциональными соотношениями.

** Штрих означает дифференцирование по ξ.

*** Такой выбор C имеет смысл, если мы интересуемся асимптотическим видом распространяющегося возмущения, первоначально локализованного в ограниченной области пространства.

4.2 УСТАНОВИВШИЕСЯ МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ [12 — 15]

В этом случае эффекты дисперсии связаны с отступлением от квазигидродинамических уравнений (9), в которых не учитывались, во-первых, инерция электронов и, во-вторых, отступление от квазинейтральности. При учете хотя бы одного из этих факторов можно получить установившиеся движения, отличные от плоско-параллельного потока. Им соответствуют две характерные длины. Первая, очевидно, связана с инерцией электронов (зависит от массы электрона). Если $c/\omega_0 \gg H_0/(4\pi n e)$*, то по мере увеличения крутизны фронта раньше начинает играть роль первый фактор, а разделением заряда можно пренебречь. Рассматривая этот случай, мы не будем еще учитывать и теплового движения, так что система уравнений, описывающая движение ионов и электронов и профиль полей в установившейся волне примет вид:

$$M v'_{xi}\,(v_{xi} - u) = e E_x + (e/c)\, v_{yi}\, H$$

— уравнение движения ионов в направлении оси x (куда распространяется волна);

$$M v'_{yi}\,(v_{xi} - u) = e E_y - (e/c)\, v_{xi}\, H$$

— вдоль оси y, перпендикулярно направлению движения волны и магнитному полю (см. рис. 9);

$$\begin{gathered} m v'_{xe}\,(v_{xe} - u) = -e E_x - (e/c)\, v_{ye}\, H\,; \\ m v'_{ye}\,(v_{xe} - u) = -e E_y + (e/c)\, v_{xe}\, H\,; \\ n_i = \frac{n_0 u}{u - v_{xi}}\,; \qquad n_e = \frac{n_0 u}{u - v_{xe}}\,; \\ n_i = n_e \end{gathered} \tag{23}$$

(Из последнего уравнения, выражающего квазинейтральность, вытекает равенство компонент скорости электронов и ионов вдоль x)

$$E_y = (u/c)\,(H - H_0)$$

$$-H' = (4\pi/c)\, n e\,(v_{yi} - v_{ye})$$

Исключая из этих уравнений все переменные кроме H, получим (с точностью до членов с m/M)

$$-\frac{m c^2}{4\pi n_0 e^2 u}\,\frac{d}{d\xi}\left[\frac{dH}{d\xi}\left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u\right)\right]\left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u\right) = \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u\right) H + u H_0 \tag{24}$$

Это уравнение определяет профиль изменения H в исследуемой установившейся волне. Интегрируя один раз, приведем его к виду

$$-a^2 (H')^2 \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u\right)^2 = \frac{(H^2 - H_0^2)^2 - 16\pi n_0 M u^2 (H - H_0)^2}{16\pi n_0 M} + C\,.$$

$$\left(a^2 = \frac{m c^2}{4\pi n_0 e^2} = \frac{c^2}{\omega_0^2}\right) \tag{25}$$

Это уравнение, как и уравнение (20), описывает периодические волны конечной амплитуды. Поведение интегральных кривых на фазовой плоскости (H', H) весьма напоминает картину, уже изображенную на рис. 7. Выбирая C из условия $H' \to 0$ при $H \to H_0$, получим особый случай уединенной волны. Из условия $H' = 0$ при $H = H_{\max}$ находим связь между амплитудой волны и скоростью

$$u^2 = \frac{(H_{\max} + H_0)^2}{16\pi n_0 M} \tag{26}$$

При малых амплитудах ($H_{\max} \to H_0$) скорость волны, уменьшаясь, стремится к $H_0/\sqrt{4\pi n_0 M}$. Профиль магнитного поля в случае малой амплитуды имеет вид

$$H = H_0\left[1 + 2\left(\frac{4\pi n_0 M u^2}{H_0^2} - 1\right) \times \operatorname{sech}^2\left\{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{4\pi n_0 M u^2}{H_0^2} - 1}\right\}\right]. \tag{27}$$

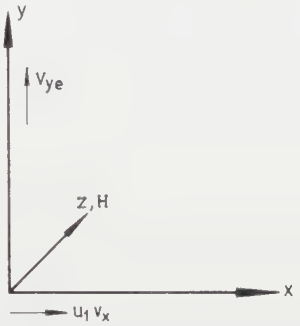

Рис. 9 Система координат для волны, распространяющейся поперек поля.

Уравнение (25) имеет действительное решение не при сколь угодно больших u и H. Так например, для уединенных волн решения существуют при $H_{\max} < 3H_0$ (т.е. $u < 2H_0/\sqrt{4\pi n_0 M}$). При приближении амплитуды волны к критической плотность ионов (электронов) на гребне волны стремится к бесконечности. Физически это означает следующее. Уединенная волна представляет собой «горб» электрического потенциала φ. В системе координат, связанной с волной, поток ионов из $x = \infty$ набегает на этот потенциальный барьер со скоростью u. При не слишком больших амплитудах начальная кинетическая энергия иона $Mu^2/2$ превышает высоту потенциального барьера $e\varphi_{\max}$ и ионы, несколько задержавшись, переваливают через него. Однако, как следует из решения, с ростом амплитуды волны потенциальный барьер становится настолько высоким, что $e\varphi_{\max} > Mu^2/2$. Момент $e\varphi_{\max} = Mu^2/2$ соответствует амплитуде $H_{\max} = 3H_0$, $u = 2H_0/\sqrt{4\pi n_0 M}$ (иначе говоря критическое «число Маха» равно 2). На гребне такой волны ионы, потеряв скорость, «останавливаются», а их плотность возрастает до бесконечности. При еще больших амплитудах ионы просто «отражались» бы от барьера, но соответствующее такой картине движение уже не описывается в рамках нашей исходной системы уравнений (23), так как после отражения течение становится «многопотоковым» (взаимопроникающие потоки набегающ ихи отраженных ионов).

---

* Это условие можно переформулировать следующим образом: $nmc^2 \gg H^2/8\pi$.

Таким образом, мы видим, что эффекты дисперсии не могут остановить «опрокидывание» волн с достаточно большой амплитудой в холодной плазме.

Если бы мы учли тепловой разброс скоростей ионов, то даже при малых амплитудах волны могли бы найтись, вообще говоря, ионы, отражающиеся от барьера (это ионы с малой относительной скоростью $u - v_x$), то есть двигавшиеся первоначально в направлении распространения волны со скоростями, близкими к u; эти ионы можно назвать «захваченными».

Без учета «захваченных» ионов легко найти решение для уединенной волны и в более общем виде с учетом теплового разброса, рассматривая функцию распределения ионов по скоростям. Рассмотрим сразу противоположный предельный случай $n_0 m c^2 \ll H^2/8\pi$, когда дисперсия определяется разделением зарядов, а не инерцией электронов. Функция распределения ионов $f(v, \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(v_x - u)\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{e\varphi'}{M}\frac{\partial f}{\partial v_x} = 0 \tag{28}$$

Здесь мы не учли действие на ионы магнитного поля. Это справедливо, если характерный размер возмущенной области (длина волны) значительно меньше радиуса кривизны ионов в магнитном поле, т.е. $\frac{H}{4\pi n e} \ll \frac{u}{eH/Mc}$, что всегда выполняется, т.к. мы приняли $H^2/8\pi \ll nMc^2$ $(u \sim H/\sqrt{4\pi n M})$. По этой же причине в (28) опущен член, учитывающий действие вихревого электрического поля E_y, так как $E_y = (u/c)(H - H_0)$.

Электрическое поле удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\varphi'' = 4\pi e\,(n_i - n_e)\,, \tag{29}$$

где $n_i = \int f\,dv$. Поскольку инерция электронов не учитывается и, следовательно, магнитное поле переносится со скоростью движения электронов, то плотность электронов меняется прямо пропорционально величине напряженности магнитного поля

$$\frac{n_e}{H} = \frac{n_0}{H} \tag{30}$$

Наконец, магнитное поле определяется из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\,\mathbf{j}$ (ток смещения несущественен, поскольку мы приняли, что $H_0/\sqrt{4\pi n_0 M} \ll c$). Это уравнение дает

$$-H' = -\frac{4\pi}{c}\,e n\,v_{ye}\,, \tag{31}$$

где $v_{ye}c = (\varphi'/H)$ (поскольку в пренебрежении инерцией $\mathbf{v} = c\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}/H^2$).

Система уравнений (28)—(31) интегрируется следующим образом. Пользуясь уравнением (31), найдем решение (28) для функции распределения

$$f = f_0\left[u - \sqrt{(v_x - u)^2 + \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}}\right],$$

где $f_0(v_x)$ — распределение ионов по скоростям в невозмущенной волной области*: Исключая и остальные переменные кроме H, получим

$$-H'' = (4\pi e)^2\frac{n_0}{H_0}\left\{\int f_0 \times \left[U - \sqrt{(v_x - u)^2 + \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}}\right]dv_x - \frac{n_0}{H_0}H\right\}. \tag{32}$$

Таким образом, задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничным условием $H' \to 0$ при $H \to H_0$. Если, например, опять вернуться к случаю холодных ионов, когда $f_0(v_x) = n_0\,\delta(v_x)$ то (32) принимает вид

$$-H'' = (4\pi e)^2\frac{n_0}{H_0}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}}} - \frac{H}{H_0}\right) \tag{33}$$

После однократного интегрирования получим

$$\frac{1}{2}H'^2 - \frac{(4\pi e)^2 n_0^2}{H_0^2}\cdot\frac{H^2}{2} + 2\pi\frac{(4\pi e)^2}{H_0^2}n_0^3 u M\sqrt{u^2 - \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}} + C\,. \tag{34}$$

Уединенная волна соответствует выбору $H' \to 0$ при $H \to H_0$. Характерной длиной является $H_0/(4\pi n_0 e)$. Связь между скоростью волны u и амплитудой магнитного поля $H_{\max}$ имеет уже знакомый вид $u^2 = (H_{\max} + H_0)^2/(16\pi n_0 M)$ как и в противоположном предельном случае (см. формулу (26)). Для произвольной функции распределения $f_0(v)$ (в рамках наложенного ограничения об отсутствии захваченных частиц) связь u с амплитудой волны выражается следующим уравнением

$$8\pi M\int_{\sqrt{\beta}}^{\infty} v\sqrt{v^2 - \beta}\,f_0(u - v)\,dv + H^2_{\max} = 8\pi M\int_0^{\infty} v^2 f_0(u - v)\,dv + H_0^2\,, \tag{35}$$

где
$$\beta = \frac{(H_{\max} - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}\,.$$

Если принять $\langle v^2\rangle = \int v^2 f\,dv$ малым в сравнении с $H_0^2/(4\pi n_0 M)$, то разлагая (31) в ряд, найдем

---

* Отсутствие «захваченных» частиц означает, что $f_0(v) \equiv 0$ при $v \geqslant u - \sqrt{\frac{(H_{\max} - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}}$

$$u \approx u_0 + \frac{\langle v^2 \rangle \left[(u_0{}^2 - \beta)^{\frac{3}{2}} - u_0{}^3 + \frac{3}{2}\, u_0 \beta \right]}{(2 u_0{}^2 - \beta - 2 u_0 \sqrt{u_0{}^2 - \beta})(u_0{}^2 - \beta)} + \dots, \tag{36}$$

где

$$u_0 = \frac{H_{\max} + H_0}{2\sqrt{4\pi n_0 M}} \,.$$

Нужно иметь в виду, что любые уединенные волны представляют собой особый тип установившихся нелинейных волн. Если периодические волны могут существовать при произвольном, вообще говоря, законе дисперсии (лишь бы не линейном), то для существования уединенных волн требуется определенный характер закона дисперсии. Это связано с тем, что в то время как спектральное разложение периодических волн содержит дискретные ω и k, разложение профиля уединенной волны имеет сплошной спектр. Поэтому уже неприменимы рассуждения, использовавшиеся во вводном параграфе. Изобразим профиль скорости (вдоль направления распространения) в уединенной волне (рис. 10а). Видно, что участкам с наибольшими пространственными градиентами («эффективными» k) соответствуют и наибольшие амплитуды скорости. Ясно, что для существования стационарной картины необходимо, чтобы большим k соответствовали меньшие фазовые скорости ω/k в линейной теории. Тогда более сильное влияние нелинейного члена $(v \nabla)\, v$ на участки с большей амплитудой скорости будет, грубо говоря, компенсироваться уменьшением ω/k*. Такого рода законами дисперсии (ω/k падает с ростом k) обладают рассмотренные нами магнитозвуковые волны и «ионный» звук в плазме при $p_i \ll p_e$.

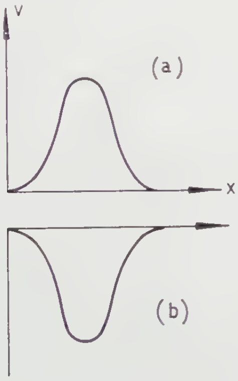

Рис. 10 Уединенная волна: (a) — сжатия; (b) — разрежения.

В обычной гидродинамике близким законом дисперсии характеризуются волны на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. Теория волн на «мелкой воде», как известно, обнаруживает фундаментальное сходство с теорией изэнтропических плоских движений в обычной газовой динамике (эффективный показатель адиабаты $\gamma = 2$), а, стало быть, и с динамикой разреженной плазмы, движущейся поперек магнитного поля (система уравнений (9)). На «мелкой воде» произвольный, вообще говоря, профиль начального возмущения стремится «опрокинуться». Однако, по мере увеличения крутизны переднего фронта, начиная с некоторого момента времени станет существенной конечность глубины канала. Учет ее дает нужный дисперсионный эффект. Действительно, закон дисперсии для малых колебаний на воде конечной глубины h имеет вид

$$\omega^2 = g k \tanh(kh)\,, \tag{37}$$

где g — ускорение силы тяжести. При малых k (или больших длинах волн $\lambda \gg h$) (37) имеет вид

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \approx g h \, \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(kh)^2} \,. \tag{38}$$

Дисперсионное соотношение (38) напоминает, например, закон дисперсии (3) для магнитозвуковых волн в разреженной плазме. Роль $1/\varkappa$ в (3) играет характерный масштаб h.

5. «Квазилинейное» приближение

Влияние малой нелинейности на эффекты поглощения удобно описывать в рамках «квазилинейного» приближения, в котором учитывается обратное влияние колебаний плазмы на усредненное распределение частиц по скоростям («средний фон»), но не учитываются нелинейные эффекты искажения формы волны (взаимодействие гармоник). Ясно, что это справедливо лишь для достаточно слабых волн.

Второе ограничение накладывается на число одновременно существующих различных гармоник в волне (иначе говоря, на ширину волнового пакета), чтобы можно было пренебречь захватом резонансных частиц. В случае, например, продольных ленгмюровских колебаний для этого необходимо выполнение неравенства

$$\Delta v_\varphi \equiv \Delta(\omega/k)\, \Delta\sqrt{e\varphi_0/m}$$

где Δv_φ — разброс фазовой скорости в пакете волн, а φ_0 — амплитуда электростатического потенциала в волне. Аналогичная оценка может быть написана для произвольного типа волны в плазме. Пренебрежение захваченными частицами позволяет считать средний фон однородным в пространстве.

5.1 ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В этом разделе мы получим квазилинейное кинетическое уравнение для усредненной за период колебаний функции распределения частиц по скоростям. Для простоты ограничимся двумя случаями: ленгмюровскими колебаниями электронов в плазме без магнитного поля и поляризованной по кругу электромагнитной волной, распространяющейся вдоль однородного магнитного поля в плазме при частотах, близких к циклотронной частоте электронов.

---

* Аналогичные рассуждения показали бы, что линейным законам дисперсии обратного типа (ω/k постоянно при малых k и растет при больших k) можно сопоставить нелинейные уединенные волны «разрежения» (рис. 10b).

а) Ленгмюровские колебания

Электрическое поле колебаний представим в виде:

$$\mathbf{E}\,(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_\mathbf{k} \exp\,\{\mathrm{i}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)\}$$

$$\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{E}_\mathbf{k}^+, \qquad \mathrm{Re}\,\omega_{-\mathbf{k}} = -\,\mathrm{Re}\,\omega_\mathbf{k} \tag{39}$$

Разлагая функцию распределения частиц в интеграл Фурье по пространственным координатам и по времени

$$f = f_0 + \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} f_\mathbf{k} \exp\,\{\mathrm{i}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)\} \tag{40}$$

и предполагая малость $f_\mathbf{k}$, получаем из линеаризованного уравнения Больцмана без учета столкновений:

$$f_\mathbf{k} = \frac{(e/m)\,\mathbf{E}_\mathbf{k}\cdot(\partial f_0/\partial \mathbf{v})}{-\mathrm{i}\,\omega + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}} \tag{42}$$

где f_0, в отличие от обычной линейной теории, предполагается не постоянной, а медленно изменяющейся во времени функцией.

Для нее, с другой стороны, справедливо уравнение, получающееся из кинетического уравнения путем усреднения

$$\begin{aligned}\frac{d f_0}{d t} &= \frac{e}{m}\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\mathbf{E}_\mathbf{k}^+ \cdot \frac{\partial f_\mathbf{k}}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \frac{e^2}{m^2}\frac{\partial}{\partial v_i}\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,|\,\mathbf{E}_\mathbf{k}{}^2\,|\,\frac{k_i k_e}{k^2}\cdot\frac{\partial f_0/\partial v_e}{-\mathrm{i}\omega + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}\end{aligned} \tag{43}$$

Как известно, интеграл можно брать по действительным k, если $\omega = \omega_r + \mathrm{i}\,\omega_I$ и $\omega_I > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{d f_0}{d t} &= \frac{e^2}{m^2}\frac{\partial}{\partial v_i}\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}|\,\mathbf{E}_\mathbf{k}|^2\frac{k_i k_e}{k^2} \\ &\times \frac{\partial f_0/\partial v_e}{(\omega_r - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2 + \omega_I{}^2}\,[\mathrm{i}\,(\omega_r - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) + \omega_I] \\ &\cong \pi\,\frac{e^2}{m^2}\frac{\partial}{\partial v_i}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}|\,\mathbf{E}_\mathbf{k}|^2\frac{k_i k_e}{k^2}\frac{\partial f_0}{\partial v_e}\,\delta\,(\omega_\mathbf{k} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}),\end{aligned} \tag{44}$$

где мы предположили, что $\omega_I \ll \omega_r$. На самом деле наличие мнимой части у частоты дает конечную ширину области взаимодействия между отдельной Фурье — гармоникой волны и частицами плазмы (своего рода «радиационную» ширину).

Обмен энергией между плазмой и волной определяется выражением:

$$\dot{\varepsilon} = \int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\mathbf{j}_\mathbf{k}\,\mathbf{E}_\mathbf{k}{}^+ = -e\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int \mathbf{v}\,f_\mathbf{k}\,\mathbf{E}_\mathbf{k}^+\,d\mathbf{v} \tag{45}$$

или для отдельной Фурье-компоненты:

$$\dot{\varepsilon}_k = -\,e\int \mathbf{v}\,f_\mathbf{k}\,\mathbf{E}_\mathbf{k}^+\,d\mathbf{v} \tag{46}$$

Подставляя в (46) f_k из (42), получаем:

$$\dot{\varepsilon}_k = -\frac{e^2}{m^2}\,\mathbf{E}_\mathbf{k}\int \mathbf{v}\;\frac{\mathbf{E}_\mathbf{k}^+\;\partial f_0/\partial\mathbf{v}}{-\,\mathrm{i}\omega + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}\,d\mathbf{v}$$

Вводя цилиндрическую систему координат с осью $v_\parallel$ вдоль вектора k, получаем:

$$\dot{\varepsilon}_k = \pi\,\frac{\omega_0{}^2}{k^2}\,\omega_k F'\Big]_{k v = \omega_k}\cdot\frac{E_k{}^2}{4\pi N}, \tag{47}$$

где $F = 2\pi\int f(v_\parallel, v_\perp)\,v_\perp\,dv_\perp$ — «продольная» функция распределения частиц.

До сих пор мы рассматривали разреженную плазму без учета столкновений частиц. Вообще говоря, влияние столкновений сравнивается с влиянием волны на движение частиц только в том случае, когда волна является равновесной [11], т.е. ее амплитуда не превышает амплитуды соответствующей гармоники в спектре тепловых шумов плазмы. Только для теплового шума сравниваются такие процессы, как черенковское излучение волн движущейся частицей, излучение при столкновениях, «затухание Ландау», поглощение при столкновениях. Уровень теплового шума колебаний плазмы как раз и определяется балансом между ними.

Однако и для колебаний большой амплитуды («надтепловых») столкновения могут определять ряд процессов и прежде всего — резонансное поглощение. Под действием волны происходит сильное искажение функции распределения в области резонансных частиц. В результате столкновений же частично «восстанавливается» максвелловская функция распределения и устанавливается стационарное поглощение волн. Все же прочие эффекты столкновений («столкновительная» ширина в (44), столкновения резонансных частиц друг с другом и т.д.) по-прежнему малы. Формально уравнение, описывающее поведение усредненной функции распределения во времени, получается, как нулевой член в разложении точного кинетического уравнения по $1/N_D$ (отношению v/ω_0 или энергии тепловых шумов к тепловой энергии плазмы):

$$\begin{aligned}\frac{d f_0}{d t} = \pi\,\frac{e^2}{m^2}\int d\,k\;|\,E_k|^2\,\frac{k_i k_e}{(2\pi)^3 k^2}\,\frac{\partial f_0}{\partial v_e}\,\delta\,(\omega_\mathbf{k} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) \\ -\sum_\alpha \mathrm{St}\,(f_0, f_\alpha),\end{aligned} \tag{48}$$

где последний член описывает столкновения резонансных частиц с прочими частицами плазмы. Этот член можно, например, взять в форме Ландау и линеаризовать, так как резонансных частиц мало:

$$\begin{aligned}2\mathcal{L}\,\frac{\partial}{\partial v_i}\,\frac{1}{v^3}\Big\{v_i f_0 + \Big[v^2\delta_{ik} - v_i v_k \\ - \frac{T}{m}\,\frac{v^2\delta_{ik} - 3\,v_i v_k}{2\,v^2}\Big]\frac{\partial f_0}{\partial v_k}\Big\},\end{aligned}$$

где $\mathcal{L} = \lambda\omega_0{}^4/N$ и $\lambda/8\pi$ — кулоновский логарифм.

б) Поперечные колебания при наличии постоянного магнитного поля

В плазме, находящейся в магнитном поле, могут распространяться различного типа волны. Мы ограничимся, для простоты, изучением взаимодействия плазмы с поперечной волной, поляризованной по кругу в сторону вращения электронов и распространяющейся вдоль однородного внешнего поля. Вводя цилиндрические координаты с осью z вдоль внешнего поля H, получаем следующее выражение для поправки к функции распределения

$$f_k = \mathrm{i}\, E_- \frac{1}{\omega} \frac{(\omega - k v_\parallel) \dfrac{\partial f_0}{\partial v_\perp} + v_\perp\, k \dfrac{\partial f_0}{\partial v_\parallel}}{\omega - k\, v_\parallel - \omega_H} \frac{e}{2m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad (49)$$

где $E_- = E_x - \mathrm{i}\, E_Y$, $\omega_H = e\, H/mc$, а φ — угол в пространстве скоростей. Здесь учтено, что

$$H_\pm = \pm \frac{\mathrm{i}c}{\omega} k E_\pm \qquad (50)$$

Дисперсионное уравнение для такой волны имеет вид:

$$\omega_k = \omega_H \left(1 - \omega_0{}^2/k^2 c^2\right) \qquad (51)$$

Подставляя (49) в усредненное по времени уравнение Больцмана с учетом принятых допущений, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{df_0}{dt} = \mathcal{L}_1 &\left(\frac{1}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} v_\perp + \frac{v_\perp k}{\omega_H} \frac{\partial}{\partial v_\parallel}\right) \\ &\times \left.\frac{\Theta(k)}{\left|\omega' - \dfrac{\omega - \omega_H}{k}\right|}\right|_{k = v_\parallel/(\omega - \omega_H)} \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{v_\perp k}{\omega_H} \frac{\partial}{\partial v_\parallel}\right) f_0 - \sum_a \mathrm{St}(f_0, f_a)\end{aligned} \qquad (52)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{e^2 E_0{}^2}{8m^2\eta};\ |E_k|^2 = E_0{}^2 \frac{\Theta}{2\eta};\ \frac{1}{2\eta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Theta(k)\, dk = 1;\ \omega' \equiv \frac{d\omega}{dk}$$

Изменение энергии k-ой гармоники вычисляется так же, как и для ленгмюровских колебаний. В результате получаем:

$$\dot{\varepsilon}_k = \frac{\pi^2 e^2}{2mk} |E_k|^2 \frac{\omega_H}{\omega} \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} + \frac{v_\perp k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel}\right) v_\perp{}^2 dv_\perp \qquad (54)$$

5.2 ПОГЛОЩЕНИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

а) Без магнитного поля

Ленгмюровские волны в разреженной плазме затухают, если функция распределения резонансных частиц убывает, т.е. $\partial F/\partial v < 0$ для $v = \omega_k/k$. Это связано с тем, что более быстрые частицы замедляются, а более медленные частицы — ускоряются волной. Если в резонансе быстрых частиц меньше, чем медленных, то волна затухает, см. подробнее [8—10].

Рассмотрим взаимодействие одномерного волнового пакета заданной амплитуды и спектральной плотности ($\Theta(k)$) с плазмой.

Пока столкновения не успевают вступить в действие, искажение начальной функции распределения описывается уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}_1 \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \left.\frac{\Theta(v_\parallel)}{|\omega' - \omega/k|}\right|_{\omega/k = v_\parallel} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_\parallel} \qquad (55)$$

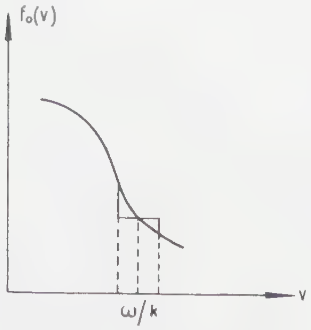

Рис. 11 Искажение функции распределения.

Согласно (55) резонансные частицы перераспределяются и на функции распределения образуется плато (уравнение (55) аналогично уравнению теплопроводности в неоднородной среде). Столкновения постепенно «сглаживают» края плато и устанавливается стационарное состояние, в котором:

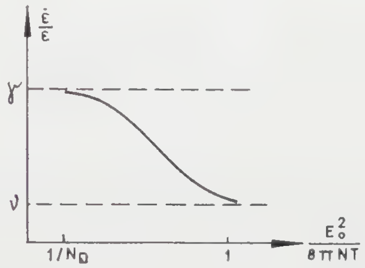

Рис. 12 Зависимость поглощения ленгмюровских колебаний от амплитуды.

$$F'(v_\parallel) \cong \frac{6/v_\parallel{}^2}{\dfrac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}} \dfrac{\Theta(v_\parallel)}{|\omega' - \omega/k|} + \dfrac{6T}{m v_\parallel{}^3}} \cdot F(v_\parallel); \quad v_\parallel = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})}{k} \qquad (56)$$

Так как в результате обратного действия волны изменяется в основном производная, а не сама функция распределения, то

$$\begin{aligned}F'(v_\parallel) &\cong -\frac{6/v_\parallel{}^2}{\dfrac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}} \dfrac{\Theta(v_\parallel)}{|\omega' - \omega/k|} + \dfrac{6T}{m v_\parallel{}^3}} F_m \\ &= \frac{F'_m}{1 + \dfrac{E_0{}^2}{8\pi N T} \left(\dfrac{v_\parallel}{\omega_0}\right)^3 \dfrac{N}{12} \dfrac{\langle k \rangle}{2\eta} \dfrac{\Theta(v_\parallel)}{\lambda}},\end{aligned} \qquad (57)$$

где $\langle k \rangle$ — среднее волновое число пакета, η — полуширина, а $F_m = (N\sqrt{2\pi\, T/m}) \exp(-m v_\parallel{}^2/2T)$.

Подставляя (56) в (47), получаем:

$$\dot{\varepsilon}_k = \pi \frac{\omega_0{}^2}{k^2} \omega \frac{F'_m (|E_k|^2/8\pi)}{1 + \dfrac{E_0{}^2}{2\pi N T} \left(\dfrac{v_\parallel}{\omega_0}\right)^3 \dfrac{N}{12} \dfrac{\langle k \rangle}{2\eta} \dfrac{\Theta(v_\parallel)}{\lambda}} \qquad (58)$$

и, суммируя по всем гармоникам в пакете, получаем*:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}\frac{\omega_0{}^3}{\langle k\rangle^2}\,\frac{F_m{}'(\omega/\langle k\rangle)\,E_0{}^2/2\pi}{1+\dfrac{E_0{}^2}{8\pi NT}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0\langle k\rangle}\right)^3\dfrac{N}{12}\,\dfrac{\langle k\rangle}{2\eta}\,\dfrac{1}{\lambda}}$$

При $E_0{}^2/8\pi\,NT \to 1/N_D{}'$, где $N_D{}' = N(v_{\|}/\omega_0)^3\,(3\pi/4)$ — число частиц в сфере радиуса $v_{\|}/\omega_0$, $\dot{\varepsilon} \to 2\gamma\,E_0{}^2/8\pi$, где γ получается из линейной теории. При $E_0{}^2/8\pi\,NT \to 1$, $\dot{\varepsilon} \simeq \nu\,E_0{}^2/8\pi$. Таким образом, эффективное «время затухания» пакета меняется от времени порядка $1/\gamma$ для волны, не превышающей уровень теплового шума, до времени порядка времени столкновения для волны большой амплитуды ($E_0{}^2 \sim 8\pi\,NT$.)

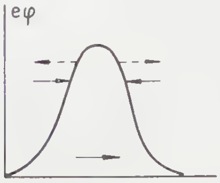

Рис. 13 Отражение частиц от потенциального «горба».

б) В присутствии магнитного поля

Мы ограничимся только изучением поглощения одномерного пакета «необыкновенных» волн с круговой поляризацией вблизи частот порядка $\omega_H = eH/mc$.

Так как $\omega < \omega_H$, то резонанс имеет место в области отрицательных скоростей $v_{\|}$ ($v_{\|}\,k < 0$). На резонансные частицы, с одной стороны, действует электрическое поле волны, «раскручивающее» их, а с другой — магнитное поле, создающее «световое» давление.

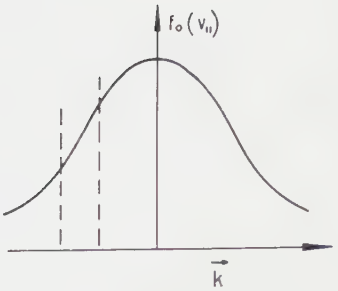

Рис. 14 Резонансные частицы для необыкновенной волны.

Искажение функции распределения частиц f_0 за время, меньшее времени столкновения, описывается уравнением

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \mathcal{L}_1\left(\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial v_\perp}v_\perp + \frac{v_\perp k}{\omega_H}\frac{\partial}{\partial v_{\|}}\right)\frac{\Theta(v_{\|})}{|\,\omega' - (\omega-\omega_H)/k\,|} \times\left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{v_\perp k}{\omega_H}\frac{\partial}{\partial v_{\|}}\right)f_0 \qquad (60)$$

Если вместо $v_{\|}$, $v_\perp$ ввести новые переменные

$$w_\perp = v_\perp;\quad w_{\|} = v_{\|} - \frac{v_\perp{}^2}{2v_\varphi}, \qquad (61)$$

то в области, где $\Theta/|\,\omega' - (\omega - \omega_H)/k|$ можно считать постоянной, уравнение (60) переходит в:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = L_1\frac{1}{w_\perp}\frac{\partial}{\partial w_\perp}w_\perp\frac{\partial f_0}{\partial w_\perp}, \qquad (62)$$

где $$L_1 = \frac{\Theta}{|\,\omega' - (\omega - \omega_H)/k\,|}\,\mathcal{L}_1$$

Уравнение (62) описывает процесс выравнивания функции распределения вдоль линий: $W_{\|} = \text{const.}$, т.е. $v_{\|} - (v_\perp^2/2v_\varphi) = \text{const}$. Эффективный коэффициент диффузии обращается в нуль на границе резонансной области при $v = v_1$, v_2. Однако ассимптотически за время, значительно большее времени столкновения, устанавливается совершенно иное состояние. Очевидно, что оно определяется уже не начальной функцией распределения, а граничными условиями. Мы должны потребовать, чтобы справа от v_1 функция распределения была максвелловской и при $v_{\|} = v_1$ не было бы скачка функции распределения. Поэтому функция

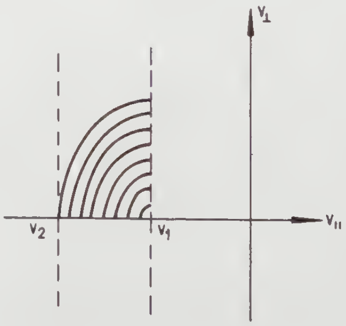

Рис. 15 Характеристики на плоскости ($v_\perp$, $v_{\|}$).

---

* Это выражение допускает простую интерпретацию. Представим его в виде $\dot{\varepsilon} = (\dot{\varepsilon})_0/(1+\tau_1/\tau_2)$. Здесь $(\dot{\varepsilon})_0$ — поглощение энергии в линейном приближении («затухание Ландау»), τ_1 — характерное время установления локального максвелловского распределения, τ_2 — характерное время искажения функции распределения под действием поля волнового пакета. Если $\tau_1 \ll \tau_2$, то есть столкновения все время успевают «максвеллизовать» функцию распределения, мы получаем обычное затухание Ландау. С ростом амплитуды волны искажение, вносимое ею, становится настолько большим, что столкновения не успевают «максвеллизовать» и декремент затухания уменьшается. Такая интерпретация позволяет оценить поглощение и в случае «монохроматической» волны (для которой квазилинейное приближение неприменимо). Пусть амплитуда потенциала в волне φ. Тогда ответственными за поглощение будут частицы со скоростями в интервале $\frac{\omega}{k} - \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}} < v < \frac{\omega}{k} + \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}$ (частицы, отражающиеся от «потенциальных горбов»). Это значит, что наиболее сильно искажается функция распределения в области с шириной порядка $\sqrt{e\varphi/m}$. Из-за кулоновских столкновений с рассеянием на малые углы локальное равновесие в этой области будет восстанавливаться, очевидно, за время $\tau_1 \sim e\varphi/\nu T$. Время же нелинейного искажения под действием поля волны имеет порядок $\tau_2 \sim \lambda/\sqrt{e\varphi/m}$, где λ — длина волны. Окончательно получим

$$\dot{\varepsilon} \sim (\dot{\varepsilon})_0 \Big/ \left(1 + (e\varphi)^{\frac{3}{2}}/T\lambda\nu\sqrt{m}\right)$$

в пренебрежении эффектом столкновений, очевидно, равна:

$$f_0{}^0 = \frac{N}{(2\pi)^{3/2}(T/m)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{mv_1{}^2}{2T} - \frac{mv_\varphi v_1}{T} + \frac{mv_\varphi v_\parallel}{T} - \frac{mv_\perp{}^2}{2T}\right\} \tag{63}$$

Функция $f_0{}^0$ является нулевым приближением по $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1$, т.е. по обратной амплитуде волны. При получении этого выражения мы пренебрегаем «хвостом» максвелловского распределения ($v_\parallel < v_2$). Так как по условию $v_\varphi \gg |v_\parallel|$, то, полагая, что $m\, v_\varphi\, \Delta v/T \gg 1$, где $\Delta v = v_1 - v_2$, можно пренебречь «хвостовыми» частицами.

Разлагая действительную функцию распределения в ряд по $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1$, из (52) получаем выражение:

$$v_\perp \left(\frac{\partial f_0{}^1}{\partial v_\perp} + \frac{v_\perp}{v_\varphi}\frac{\partial f_0{}^1}{\partial v_\parallel}\right) = -\frac{2m^2 v_\varphi{}^2}{T^2}\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_1}\left\{\frac{v_\perp{}^2 + 2v_\parallel{}^2}{v} - 2v_\parallel\right\} f_0{}^0 \tag{64}$$

Отсюда, вообще говоря, легко найти первую поправку к функции распределения $f_0{}^1$: однако она нас не интересует.

Подставляя выражение (64) в (54), получаем поток энергии от k-ой компоненты волны к плазме:

$$\frac{8\pi\dot{\varepsilon}_k}{H_0{}^2} = -\frac{8\pi NT}{H_0{}^2}\lambda\frac{1}{N_D}\left(\frac{\omega_k}{\omega_k - \omega_H}\right)^2 \omega_0 \frac{2\eta}{\langle k\rangle} \times \exp\left\{-\frac{mv_1{}^2}{2T} + \frac{m}{T}v_\varphi\,(v_\parallel - v_1)\right\} \tag{65}$$

где 2η — ширина пакета, а $H_k{}^2 = H_0{}^2\,\Theta/2\eta$
N_D — есть число частиц в «дебаевской» сфере,
$v_\parallel$ — скорость резонансных частиц, а v_1 — граница резонанса.

Если пакет достаточно велик, то эффективная ширина области (в k — пространстве), внутри которой происходит обмен энергией, есть $2\eta^* \sim (T/m\,v_\parallel{}^2)\ [(\omega_H - \omega/v_\varphi]$ (v_φ — фазовая скорость волны).

Вблизи от границы резонансной области

$$\gamma_k = -\frac{8\pi NT}{H_0{}^2}\lambda\cdot 3\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{N_0} \times \left(\frac{\omega_k}{\omega_k - \omega_H}\right)^2 \omega_0 \frac{2\eta}{\langle k\rangle}\,e^{-mv_\parallel{}^2/2T} \tag{66}$$

В то же время из формулы (54), подставив неискаженное максвелловское распределение электронов, получаем известный результат линейной теории [18]:

$$\gamma^0 = -\frac{\omega_H - \omega}{\omega_H}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega_0{}^2}{k\sqrt{T/m}}\exp\left[-\frac{m(\omega_H - \omega)^2}{2Tk^2}\right]$$

$$\gamma_k \to \gamma^0 \text{ при } \beta = \frac{8\pi NT}{H_0{}^2} \to \frac{N_D}{6}\,\frac{\omega_0}{2\eta\sqrt{T/m}}\left(\frac{\omega_H - \omega_k}{\omega_H}\right)^3 = \beta_0\,.$$

На самом деле эта формула, как и все наше приближение, заведомо несправедлива при $\beta \sim \beta_0$. Зависимость $\gamma(1/\beta)$ согласно (66) представлена на рис. 16. Истинный ход γ_k показан пунктиром.

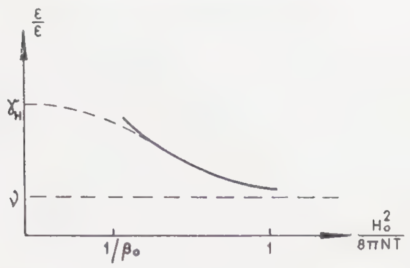

Рис. 16 Зависимость поглощения необыкновенной волны от амплитуды.

Из-за резкого обрезания функции распределения f_0 полный переход энергии от пакета к плазме еще сильнее зависит от β.

6. Устойчивость нелинейных движений в разреженной плазме

Известно, что плазма, находящаяся достаточно далеко от состояния термодинамического равновесия (иначе говоря, плазма с немаксвелловским распределением скоростей), становится неустойчивой по отношению к самовозбуждению различного рода колебаний.

В качестве примера можно привести так называемую неустойчивость при наличии пучка частиц, когда функция распределения частиц по скорости имеет дополнительные максимумы, или неустойчивость, возникающую, когда функция распределения достаточно неизотропна.

Ясно, что распространение в разреженной плазме достаточно больших возмущений должно сопровождаться заметным отклонением плазмы от термодинамического равновесия. Крайним случаем здесь может служить хотя бы «многопотоковое» движение [20—21], возникающее в результате «опрокидывания» волн с амплитудами, превышающими некоторое критическое значение.

6.1 НЕУСТОЙЧИВОСТИ МНОГОПОТОКОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Если храктерные размеры областей многопотокового движения значительно превышают длины волн возникающих неустойчивостей, можно пользоваться результатами исследования устойчивости в случае однородной плазмы.

В случае, например, двух встречных ионных потоков, движущихся поперек магнитного поля со скоростями v_0 и $-v_0$, дисперсионное уравнение имеет вид [19]:

$$\frac{2}{\omega_H\,\Omega_H} = \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} + \frac{1}{(\omega + kv_0)^2}\,.$$

Максимальный инкремент неустойчивости по порядку величины равен $(\omega_H\Omega_H)^{\frac{1}{2}}$. Для $v_0 \lesssim H/\sqrt{4\pi n_0 M}$ характерная длина волны неустойчивости имеет порядок c/ω_0. Таким образом, многопотоковые движения поперек магнитного поля (§ 3) неустойчивы.

В случае же двух ионных потоков, движущихся навстречу друг другу в отсутствии магнитного поля (электроны теперь предполагаются «горячими» и распределенными в пространстве по Больцману $n = n_0 \exp(e\varphi/T)$ дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{(\omega + k v_0)^2} + \frac{1}{(\omega - k v_0)^2} \qquad \frac{2M}{k^2 T}$$

Любопытно, что в этом случае достаточно быстрые ионные потоки ($v_0 > \sqrt{T/M}$) оказываются устойчивыми*.

6.2 НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Неустойчивости в волнах конечной амплитуды могут в принципе появляться и до образования «многопотокового» движения, то есть и при меньших амплитудах волн. Рассмотрим, например, установившуюся уединенную волну, распространяющуюся поперек магнитного поля в «холодной» плазме ($8\pi\, n\, T \ll H^2$). Вернемся снова к картине движения ионов и электронов плазмы в такой волне (рис. 17). Если $H^2 \ll 8\pi\, n\, m\, c^2$, плазма квазинейтральна. В направлении распространения волны и ионы и электроны движутся с одинаковыми скоростями. Однако электрический ток в направлении, перпендикулярном скорости волны и магнитному полю, создается только электронами. В однородной плазме, как известно, наличие заметного относительного движения ионов и электронов приводит к неустойчивости. Ясно, что аналогичного эффекта можно ожидать и здесь. Задача упростится, если при рассмотрении малых отклонений от стационарной картины уединенной волны пренебречь членами, учитывающими невозмущенное движение плазмы в направлении x. Очевидно, это справедливо в том случае, когда время развития неустойчивости значительно меньше времени «прохождения» плазмой области уединенной волны. Последнее по порядку величины равно, очевидно, $L/(H/\sqrt{4\pi\, n_0\, M})$, где L — «ширина» волны.

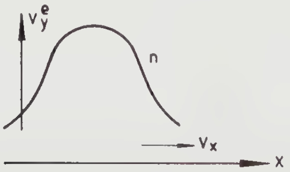

Рис. 17 Уединенная волна.

Возмущенное движение ионов и электронов будем рассматривать для простоты, как движение двух «жидкостей» с адиабатическими законами изменения давления**. Влияние магнитного поля на возмущенное движение учитывать не будем, ограничиваясь частотами колебаний, значительно большими ларморовской частоты электронов eH/mc. В этом приближении уравнения для возмущенных величин: v_x, v_y (компонента скорости электронов), V_x, V_y (компоненты скорости ионов), n_e, n_i (плотности электронов и ионов) и φ (электрический потенциал) принимают вид:

$$\mathrm{i}(\omega + k v_0) v_y = \mathrm{i} k \frac{e}{m} \varphi - \mathrm{i} k \frac{{s_0}^2}{n_0} n\,, \tag{67}$$

$$\mathrm{i}(\omega + k v_0) v_x = \frac{e}{m} \frac{dq}{dx} - \frac{{s_0}^2}{n_0} \frac{dn}{dx}\,, \tag{68}$$

$$\mathrm{i}\omega V_y = -\mathrm{i} k \frac{e}{M} \varphi\,, \tag{69}$$

$$\mathrm{i}\omega V_x = -\frac{e}{M} \frac{d\varphi}{dx}\,, \tag{70}$$

$$\mathrm{i}(\omega + k v_0) n_e + \mathrm{i} k n_0 v_y + \frac{d}{dx}(n_0 v_x) = 0\,, \tag{71}$$

$$\mathrm{i}\omega n_i + \frac{d}{dx}(n_0 V_x) + \mathrm{i} k n_0 V_y = 0 \tag{72}$$

$$-k^2 \varphi + \varphi'' = 4\pi e (n_e - n_i)\,. \tag{73}$$

Здесь (67)—(70) — уравнения движения для электронов, ионов и (71) (72) — уравнение непрерывности для электронов и ионов и, наконец, (73) — уравнение Пуассона — для электрического поля. Мы сразу выбрали зависимость возмущенных величин в виде $\varphi(x) \exp(\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i} k y)$. Входящие в уравнения v_0, ${s_0}^2$, n_0 представляют собой невозмущенные среднюю скорость электронов (по оси y), квадрат тепловой скорости электронов и плотность плазмы, зависящие от x. В предположении, что производные по x от возмущенных величин значительно больше производных от невозмущенных («квазиклассическое» приближение), система уравнений (67)—(73) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка для величины n_e

$${s_0}^2 \frac{d^2 n_e}{dx^2} + \left[(\omega + k v_0)^2 - {s_0}^2 k^2 - \frac{{\omega_0}^2}{1 - ({\Omega_0}^2/\omega^2)}\right] n_e = 0 \tag{74}$$

Исследование устойчивости сводится к задаче на собственные значения уравнения (74). Нас интересуют локальные решения, затухающие в обе стороны от уединенной волны. Исследуем поведение функции

$$F(x, \omega, k) = (\omega + k v_0)^2 - {s_0}^2 k^2 - \frac{{\omega_0}^2}{1 - ({\Omega_0}^2/\omega^2)} \tag{75}$$

В однородной плазме эта функция не зависела бы от x, и дисперсионное уравнение, связывающее ω и k, имело бы вид

$$F(\omega, k) = 0 \tag{76}$$

Это уравнение дает неустойчивые решения, когда ${v_0}^2 > {S_0}^2$, то есть когда средняя скорость относительного движения ионов и электронов превышает тепловую скорость электронов. Для не слишком больших k $(k^2 \ll \omega_0{}^2/s_0{}^2)$ это уравнение приближенно можно записать как

---

* При очень больших v_0 ($> \sqrt{T/m}$) снова возникает неустойчивость, но уже на «электронной» ветке.

** В однородной плазме такой подход дает качественно правильные результаты.

$$F\,(\omega,\ k) \approx k^2\,(v_0{}^2 - s_0{}^2) - \frac{\omega_0{}^2}{1-(\Omega_0{}^2/\omega^2)} = 0 \qquad (77)$$

Отсюда находим

$$\omega^2 = \frac{\Omega_0{}^2\,k^2\,(s_0{}^2 - v_0{}^2)}{\omega_0{}^2 - k^2\,(v_0{}^2 - S_0{}^2)} \qquad (78)$$

при $v_0{}^2 > s_0{}^2$, ω становится мнимым (неустойчивость). Возвращаясь к нашей неоднородной задаче, рассмотрим пространственный ход функции $F\,(x,\,\omega,\,k) = k^2\,(v_0{}^2 - s_0{}^2) - \omega_0{}^2/(1 - \Omega^2/\omega^2)$. (В этом приближении достаточно рассматривать действительные ω^2). Для наглядности изобразим (рис. 18) профиль изменения v_0 и $\omega_0{}^{2}$* в уединенной волне, как функцию x. В области, где $v_0{}^2 > s_0{}^2$, где $F\,(x,\,\omega,\,k) > 0$, для n_e имеется осциллирующее решение. Вдали от уединенной волны $F\,(x,\,\omega,\,k) < 0$, что соответствует экспоненциально затухающим решениям. В точках «поворота», где $F\,(x,\,\omega,\,k) = 0$, эти решения сшиваются. Итак, нужные локальные решения всегда существуют, а неустойчивость появляется в том случае, если внутри уединенной волны имеется область, где $v_0{}^2 > s_0{}^2$. Инкременты нарастания такой неустойчивости, как известно, имеют порядок Ω_0 (в плазме «нулевой» температуры максимальный инкремент еще больше $\Omega_0\,(M/m)^{1/6}$.

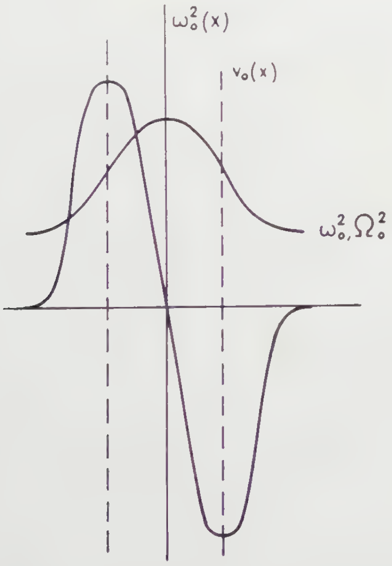

Рис. 18 Изменение скорости и плотности в уединенной волне.

Амплитуда $v_0{}^2$ в уединенной волне увеличивается с ростом числа Маха $(\mathcal{M} = u\sqrt{4\pi\,n_0\,M}\,/\,H_0)$. Наконец, при некотором значении числа Маха $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ амплитуда $v_0{}^2$ превысит среднюю тепловую скорость электронов, т.е. волна станет неустойчивой. С помощью результатов § 4 нетрудно оценить $\mathcal{M}^*$ для «холодной» плазмы $(8\pi\,n\,T \ll H^2)$:

$$\mathcal{M}^* \approx 1 + \frac{3}{8}\left(\frac{8\,\pi\,n\,T}{H^2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (79)$$

Влияние такого рода неустойчивости можно, в известном смысле, трактовать как силу трения электронов об ионы, имеющую «коллективную» природу. Заметим, наконец, что, хотя мы применяли рассмотренную неустойчивость лишь к уединенным установившимся волнам, такая же ситуация может возникнуть для любых волн в плазме с магнитным полем.

В условиях $(n\,T \sim H^2/8\pi)$ более опасными были бы, по-видимому, неустойчивости иного рода, возникновение которых можно представить следующим образом. В местах «сжатия» магнитного поля в волне адиабатически увеличивается энергия теплового движения электронов в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $(T_\perp)$, в то время как «продольная» энергия $(T_\parallel)$ меняется мало или же вообще остается постоянной. При $T_\perp/T_\parallel$, превышающем некоторое критическое значение, естественно ожидать раскачки колебаний с частотой порядка циклотронной частоты электронов (как это имеет место в однородной плазме)[18].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гершман, Б. Н., Гинзбург, В. Л., Денисов, И. Г., *УФН* **61** (1957) 561.

[2] Брагинский, С. И., *ДАН СССР* **115** (1957) 475.

[3] Bernstein, I., Greene, J., Kruskal, M., *Phys. Rev.* **108** (1957) 3.

[4] Sturrock, P., *Proc. Roy. Soc.* **A 242** (1957) 275.

[5] Ахиезер, Д. И., Любарский, Г. Я., *ДАН СССР* **80** (1951) 193.

[6] Dawson, J., *Phys. Rev.* **113** (1959) 383; препринт (1960).

[7] Buneman, O., *Phys. Rev.* **115** (1959) 503.

[8] Ландау, Л. Д., *J. Phys. USSR* **10** (1946) 25.

[9] Bohm, D., Gross, E., *Phys. Rev.* **75** (1949) 1851.

[10] Сагдеев, Р. З., Шафранов, В. Д. Доклад на 2-ой международной конференции по мирному использованию атомной энергии (1958) *Proc. Second U. N. International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy* **31** (1958) 118.

[11] Давыдов, Б. И. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», АН СССР, Москва (1958), т. I, стр. 77.

[12] Adlam, J., Allen, J., *Phil. Mag.* **3** (1958) 448.

[13] Сагдеев, Р. З. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций» (АН СССР, МОСКВА, 1958) т. IV, стр. 384. Доклад на конференции по ионизационным явлениям в Уппсале (1959): *Proc. Fourth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala* (North-Holland, Amsterdam, 1960) Vol. II, p. 1081.

[14] Gardner, C. D., Goertzel, H., Grad, H., Morawetz, C. S., Rose, M. H., Rubin, H., *Proc. Second U. N. International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy* **31** (1958) 230; «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции» (ГУПИАЭ, Москва, 1959), стр. 94.

---

* Зависимость $s_0{}^2$ от x напоминает зависимость $\omega_0{}^2$ от x.

[15] Davies, L., Lüst, R., Schlüter, A., *Z. Naturforsch.* **13***a* (1958) 916.

[16] Gardner, C. S., Morikawa, G. K., "Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves" TID—6184 (1960).

[17] Сагдеев, Р. З. Доклад конференции по магнитной гидродинамике в Риге (1960), июль. «Об одной аналогии между нелинейными колебаниями разреженной плазмы и волнами на поверхности тяжелой жидкости».

[18] Сагдеев, Р. З., Шафранов, В. Д., *ЖЭТФ* **39** (1960) 181.

[19] Кадомцев, Б. Б. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций» (АН СССР, Москва 1958), т. IV, стр. 364.

[20] Kahn, F., *J. Fluid Mech.* **2** (1957) 601.

[21] Parker, E., *Phys. Rev.* **112** (1958) 1429

(Рукопись получена 13 января 1961 г.)

NUCLEAR FUSION: 1 (1961) 101—120

FLUCTUATIONS OF A PLASMA (I)*

NORMAN ROSTOKER

JOHN JAY HOPKINS LABORATORY FOR PURE AND APPLIED SCIENCE

GENERAL ATOMIC DIVISION OF GENERAL DYNAMICS CORPORATION

SAN DIEGO, CALIFORNIA

We consider a fully ionized plasma. At time t the state of the system is represented by a point X in the phase space of all the particles. We define $D_s dX dX' \ldots dX^{(s)}$ as the joint probability that at time t the system will be in (X, dX), at time t' in (X', dX'), etc. A systematic procedure has been developed for calculating any desired moment of D_s as an expansion in the discreteness parameters e, m, and $1/n$. Spectral densities and autocorrelation functions can thus be obtained without any "Stoßzahlansatz" or Markoffian assumption. A comprehensive treatment of a plasma in thermal equilibrium has been carried out. A large class of non-equilibrium states may exist in a hot plasma for sufficient time to be considered stationary. Fluctuations have been calculated for the class of spatially homogeneous states of an infinite plasma. It is of some interest that thermal equilibrium relationships such as Kirchhoff's radiation law and the fluctuation-dissipation theorem survive. As an application we have calculated the degree of excitation of the collective modes such as plasma waves, ion oscillations, etc. For distribution functions which approach instability as some parameter is varied, the energy for some modes becomes very large and ultimately becomes infinite as instability is approached.

CONTENTS

1. THERMAL EQUILIBRIUM WITH COULOMB INTERACTIONS . . . 101
1.1 Introduction . . . 101
1.2 Joint probability functions . . . 103
1.3 Fluctuations of electric field . . . 104
1.4 Superposition of dressed particles . . . 105
1.5 Fluctuation-dissipation theorem . . . 106
1.6 Kirchhoff's radiation law . . . 106
1.7 Fluctuations of current density . . . 107
1.8 Fluctuations with a constant magnetic field . . . 108
2. NON-EQUILIBRIUM STATES WITH COULOMB FORCES . . . 110
2.1 Introduction . . . 110
2.2 Joint probability functions . . . 110
2.3 Electric field fluctuations . . . 112
2.4 Theorems relating to fluctuations . . . 114
2.5 Fokker-Planck equations . . . 115
2.6 Fluctuations with a constant magnetic field 117
2.7 Diffusion in the presence of a constant magnetic field . . . 119
REFERENCES . . . 120

1. Thermal equilibrium with Coulomb interactions

1.1 INTRODUCTION

The state of a plasma at time t is represented by a point in phase space $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1); (\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2) \ldots (\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$ where $\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n$ are position and velocity of the n-th particle. For an ensemble of systems $D_1(X, t)\, dX$ means the probability that at time t a system will be in the volume element (X, dX) of phase space. $D_1(X, t)$ determines the expectation value for the measurement of any observable at position $\mathbf{x}$ and time t, i. e.,

$$\langle O(\mathbf{x}, t)\rangle = \int D_1(Xt)\, O(\mathbf{x}t)\, dX. \qquad (1)$$

For example $O(\mathbf{x}t) = \sum_n q_n\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$, the charge density; $\sum_n q_n \mathbf{v}_n\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$, the current density, etc. If a plasma is in thermal equilibrium, $\langle O(\mathbf{x}t)\rangle = 0$ for these quantities. However there are spontaneous fluctuations so that

$$\langle O^2(\mathbf{x}, t)\rangle = \int D_1(X, t)\, O^2(\mathbf{x}t)\, dX \neq 0. \qquad (2)$$

It is possible to make more sophisticated measurements of fluctuating quantities whose expectation values are not determined by $D_1(Xt)$. We shall be

---

* Research on controlled thermonuclear reactions is a joint program carried out by General Atomic and the Texas Atomic Energy Research Foundation.

concerned in particular with the auto-correlation function, see, e. g. LAX [1]:

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} dt\, O(t)\, O(t+\tau) \qquad (3)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty} e^{i\omega\tau} S(\omega)\, d\omega$$

and the spectral density

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\int_{-T/2}^{T/2} dt\, dt'\, e^{-i\omega(t'-t)}\, O(t)\, O(t') \qquad (4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\, C(\tau)\, d\tau.$$

To determine the expectation value of quantities like $O(t)\,O(t')$, the state of the system at time t is insufficient. It is necessary to consider a more general description of the plasma that involves $D_2(Xt; X't')\,dX\,dX'$, the probability that at time t the system will be in (X, dX), and at time t' in (X', dX'). In terms of this function the expectation value is

$$\langle O(t)\, O(t')\rangle = \int D_2(Xt; X't')\, O(t)\, O(t')\, dX\, dX'. \quad (5)$$

For a stationary random process this will depend only on $\tau = t' - t$ so that

$$\langle C(\tau)\rangle = \langle O(t)\, O(t+\tau)\rangle . \qquad (6)$$

Laplace transforms will be employed in most calculations. To express $S(\omega)$ and $C(\tau)$ in terms of Laplace transforms, consider the identity

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega'-\omega)t} S(\omega') .$$

Now,

$$\int_{0}^{\infty} dt\, e^{i(\omega'-\omega)t} = \pi\,\delta(\omega'-\omega) + i\,\mathsf{P}\frac{1}{\omega'-\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{0} dt\, e^{i(\omega'-\omega)t} = \pi\,\delta(\omega'-\omega) - i\,\mathsf{P}\frac{1}{\omega'-\omega} ,$$

where **P** means the principal part. Let

$$S^{+}(i\omega) = \frac{S(\omega)}{2} + \frac{i}{2\pi}\,\mathsf{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\, S(\omega') \qquad (7)$$

$$S^{-}(i\omega) = \frac{S(\omega)}{2} - \frac{i}{2\pi}\,\mathsf{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\, S(\omega');$$

then

$$S^{+}(i\omega) + S^{-}(i\omega) = S(\omega)$$

$$S^{+}(i\omega) - S^{-}(i\omega) = \frac{i}{\pi}\,\mathsf{P}\int_{\infty}^{\infty}\frac{S(\omega')\, d\omega'}{\omega'-\omega}$$

$S^{+}(p)$ is the Laplace transform of the function $C^{+}(\tau)$ where

$$C^{+}(\tau) = C(\tau) \qquad (\tau > 0)$$
$$= 0 \qquad (\tau < 0).$$

$S^{-}(p)$ is the Laplace transform of the function $C^{-}(\tau)$ where

$$C^{-}(\tau) = C(\tau) \qquad (\tau < 0)$$
$$= 0 \qquad (\tau > 0).$$

For example;

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} S^{+}(p)\, e^{p\tau} dp = \frac{1}{2\pi}\int S^{+}(i\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau}\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{0}^{\infty} d\tau'\, e^{i(\omega'-\omega)\tau'}\, S(\omega')$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, S(\omega') \int_{0}^{\infty} d\tau'\, e^{i\omega'\tau'}\,\delta(\tau'-\tau)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau}\, S(\omega) = C(\tau) \qquad (\tau > 0)$$

$$= 0 \qquad (\tau > 0) .$$

Since $C(\tau)$ is an even function of τ,

$$S^{-}(p) = S^{+}(-p) .$$

$S^{+}(p)$ is regular in the right half of the p-plane and $S^{-}(p)$ is regular in the left half.

According to Eq. (4), $S(\omega)$ must be real if ω is real. $S^{+}(i\omega)$ is, however, complex; the real and imaginary parts satisfy a dispersion relation.

$$\mathrm{Im}\,[S^{+}(i\omega)] = \frac{1}{\pi}\,\mathsf{P}\int\frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\,\mathrm{Re}\,[S^{+}(i\omega)] \qquad (8)$$

or

$$\mathrm{Re}\,[S^{+}(i\omega)] = -\frac{1}{\pi}\,\mathsf{P}\int\frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\,\mathrm{Im}\,[S^{+}(i\omega)] .$$

The real and imaginary parts of $S^{+}(i\omega)$ are Hilbert transforms. An alternative way of writing Eqs. (8) is

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S^{+}(i\omega')\, d\omega'}{\omega'-\omega-i\lambda} = 0 , \qquad (9)$$

in which it is clear that the equality exists because of the fact that $S^{+}(i\omega)$ is regular in the lower half of the ω-plane (or $S^{+}(p)$ is regular in the right half of the p-plane). Similarly

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S^{-}(i\omega)\, d\omega'}{\omega'-\omega+i\lambda} = 0 \qquad (10)$$

because $S^{-}(i\omega)$ is regular in the upper half of the ω-plane.

The spectral density and auto-correlation function can be generalized to include spatial fluctuations and also different components of a tensor. The spectral density is defined as

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \lim_{V,T\to\infty} \frac{1}{VT} \int\limits_V \int\limits_T d\mathbf{x}\, d\mathbf{x}'\, dt\, dt'\, e^{-i[\omega(t'-t)+\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}'-x)]} \times O_\alpha(\mathbf{x}\,t) O_\beta(\mathbf{x}'\,t')$$

$$= \lim \frac{1}{VT} O^*_\alpha(\mathbf{k},\omega)\, O_\beta(\mathbf{k},\omega)\,, \tag{11}$$

which is Hermitian. The auto-correlation function is

$$C_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\tau) = \int \frac{d\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\omega\tau+\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$$

$$= \lim_{V,T\to\infty} \frac{1}{VT} \int\limits_{VT} d\mathbf{x}\, dt\, O_\alpha(\mathbf{x}\,t)\, O_\beta(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t+\tau)\,. \tag{12}$$

The symmetry properties of these quantities are

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = S^*_{\beta\alpha}(\mathbf{k},\omega) = S^*_{\alpha\beta}(-\mathbf{k},-\omega)$$

$$C_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\tau) = C_{\beta\alpha}(-\mathbf{r},-\tau)\,.$$

The total fluctuation is symmetric, i.e.,

$$C_{\alpha\beta}(0,0) = \int \frac{d\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4} S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$$

$$= \lim \frac{1}{VT} \int\limits_{VT} d\mathbf{x}\, dt\, O_\alpha(\mathbf{x}\,t)\, O_\beta(\mathbf{x}\,t)\,. \tag{13}$$

For a spatially homogeneous plasma and a stationary random process $\langle O_\alpha(\mathbf{x}t)\, O_\beta(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t+\tau)\rangle$ depends only on $\mathbf{r}$ and τ so that $C_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\tau) = \langle O_\alpha(\mathbf{x}t)\, O_\beta(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t+\tau)\rangle$. A systematic procedure will be developed for calculating $C_{\alpha\beta}$. Fourier transforms will be employed for the spatial co-ordinates and Laplace transforms for the time. The result will be obtained in the form

$$C^+_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\tau) = \int \frac{dp}{2\pi i} e^{p\tau} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} S^+_{\alpha\beta}(\mathbf{k},p) \tag{14}$$

$$= C^+_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\tau) \qquad (\tau > 0)$$

$$= 0 \qquad (\tau < 0)\,.$$

The previous discussion of the two-sided Laplace transforms may be applied to infer a Hermitian and an anti-Hermitian spectral density.

$$S^+_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, i\omega) = \frac{S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)}{2} + \frac{i}{2\pi} \mathsf{P}\int \frac{d\omega'}{\omega'-\omega} S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega')$$

$$S^-_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, i\omega) = \frac{S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)}{2} - \frac{i}{2\pi} \mathsf{P}\int \frac{d\omega'}{\omega'-\omega} S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega')$$

$$= S^+_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}, -i\omega) = [S^+_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, i\omega)]^*$$

The Hermitian spectral density is

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = S^+_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, i\omega) + [S^+_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, i\omega)]^*$$

There is also an anti-Hermitian spectral density

$$A_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, i\omega) - [S^+_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, i\omega)]^*$$

$$= \frac{i}{\pi} \mathsf{P}\int \frac{d\omega'}{\omega'-\omega} S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega')\,,$$

which is simply related to the Hilbert transform of the Hermitian spectral density. If $2\,S^+_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, i\omega)$ is symmetric, the real part will be the spectral density and the imaginary part will be its Hilbert transform.

We shall begin with a plasma consisting of electrons and randomly distributed positive ions of infinite mass. Only Coulomb forces will be considered. The calculations will be progressively generalized to include ions of finite mass, constant external magnetic field, the complete electromagnetic field and relativistic modifications. In Section 1 we shall consider only Coulomb interactions and thermal equilibrium.

1.2 JOINT PROBABILITY FUNCTIONS

$D_s(Xt; X'\,t'; \cdots X^{(s)}t^{(s)})\, dX\, dX' \cdots dX^{(s)}$ means the joint probability that at time t the system will be in (X, dX), at time t' in (X', dX') etc. The entire system is trivially Markoffian so that all functions D_s can be expressed in terms of D_1 and D_2. $D_2(Xt; X'\,t')$ satisfies the Liouville equation in the variables $X'\,t'$,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t'} + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{v}_{n'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n'}} - \frac{e^2}{m} \sum_{l\neq n}^{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_n} \frac{1}{|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_l|} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{n'}}\right\} D_2(Xt; X't') = 0 \tag{15}$$

and the initial condition

$$D_2(Xt; X'\,t') = D_1(Xt)\, \delta(X'-X)$$

where

$$\delta(X'-X) = \prod_{n=1}^{N} \delta(\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}_n)\, \delta(\mathbf{v}'_n - \mathbf{v}_n)\,.$$

Coulomb forces only are considered and the ions are omitted from the problem in the usual way. For present purposes it is sufficient to determine

$$W_{ij}(X_i\,t; X_j'\,t') = V^2 \int D_2(Xt; X'\,t')\, (dX)^{N-1}\, (dX')^{N-1} \tag{16}$$

where all coordinates are integrated out except X_i, X_j'. The method consists of taking moments of the Liouville equation to produce chains of equations. The chains are solved by an expansion procedure in which the parameters of expansion are e, m or $1/n$ as discussed previously by ROSTOKER and ROSENBLUTH [2]. The determination of W_{ij} is very directly related to the previously discussed problem of test particles in a plasma [2].

Let

$$\psi(X_1\,t; X'\,t') = V \int D_2(Xt; X'\,t')\, (dX)^{N-1}. \tag{17}$$

ψ satisfies the Liouville equation in $(X'; t')$ and the initial condition

$$\psi(X_1\,t; X'\,t') = V\, D_1(X'\,t)\, \delta(X'_1 - X_1)\,. \tag{18}$$

Assuming that $D_1(Xt)$ is symmetric with respect to the interchange of the co-ordinates of any two particles it follows that ψ is also symmetric except for particle one, i.e., particle one is a singled-out test particle. We have thus reduced the problem to the previously discussed test-particle problem except that we have different initial conditions for the present case.

The s-body functions may be defined as follows:

$$f_s(X_1 -- X_s; t) = V^s \int D_1(Xt)\,(dX)^{N-s}$$

$$F_s(X_1, t; X_2' -- X'_{s+1}, t')$$
$$= V^s \int \psi(X_1 t; X' t')\, dX_1'\, dX'_{s+2} -- dX'_N$$

$$\Omega_s(X_1 t; X_1' -- X_s', t')$$
$$= V^s \int \psi(X_1 t; X' t')\, dX'_{s+1} -- dX'_N. \quad (19)$$

We note that

$$W_{11}(X_1 t; X_1' t') = \Omega_1(X_1 t; X_1' t')$$
$$W_{12}(X_1 t; X_2' t') = F_1(X_1 t; X_2' t').$$

By taking moments of the Liouville equation, coupled chains of equations are obtained for F_s, Ω_s. These chains have previously been terminated by expanding in terms of the discreteness parameters [2]. For our present purposes we need to know $W_{11}^{(0)}$, $W_{12}^{(0)}$, $W_{12}^{(1)}$. The equations for these functions are as follows:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}_1' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1'} - \frac{e}{m}\mathbf{E}_M^{(0)}(\mathbf{x}', t') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1'}\right\} W_{11}^{(0)}(X_1 t; X_1' t') = 0 \quad (20)$$

$$W_{11}^{(0)}(X, t; X_1' t) = V f(v_1)\, \delta(X_1' - X_1)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}_2' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2'} - \frac{e}{m}\mathbf{E}_M^{(0)}(\mathbf{x}_2', t') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2'}\right\} W_{12}^{(0)}(X_1 t; X_2' t') = 0 \quad (21)$$

$$W_{12}^{(0)}(X_1 t; X_2' t) = f_2^{(0)}(X_1, X_2'; t) = f(v_1)\, f(v_2').$$

$\mathbf{E}_M^{(0)}$ means the macroscopic field

$$\mathbf{E}_M^{(0)}(\mathbf{x}', t') = n e \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2'|} f(v_2')\, d X_2' = 0 .$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}_2' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2'}\right\} W_{12}^{(1)}(X_1 t; X_2' t') - \frac{e^2}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2'} f(v_2') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2'}$$
$$\left\{\frac{f(v_1)}{|\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1 - \mathbf{v}_1(t' - t)|} + n \int \frac{W_{12}^{(1)}(X_1 t; X_3' t')\, d X_3'}{|\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_3'|}\right\} = 0 \quad (22)$$

$$W_{12}^{(1)}(X_1 t; X_2' t) = -\frac{e^2}{\Theta}\frac{\exp[-|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2'|/L_D]}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2'|} f(v_1) f(v_2').$$

In the above equations

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi\Theta}\right)^{\frac{3}{2}} \exp[-m v^2/2\Theta], \quad \frac{1}{L_D^2} = \frac{4\pi n e^2}{\Theta}.$$

The solutions of these equations are

$$W_{11}^{(0)}(X_1 t; X'_1 t') = V f(v_1)\, \delta[\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{v}_1(t' - t)]\, \delta(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1)$$
$$W_{12}^{(0)}(X_1 t; X_2' t') = f(v_1)\, f(v_2') \quad (23)$$

$$W_{12}^{(1)}(X_1 t; X_2' t') = f(v_1)\, f(v_2') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1)} \int \frac{dp}{2\pi i} e^{p(t'-t)}\, W_{pk}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2')$$

where

$$W_{pk}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = -\frac{1}{n(k L_D^2)\,\varepsilon(\mathbf{k}, 0)\,(p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2)}$$
$$\times\left\{1 + \frac{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1}\left[1 - \frac{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)(\pi/k)\,U(\mathbf{k}, p)}{(k L_D)^2\,\varepsilon(\mathbf{k}, p)}\right]\right\}$$

$$U(\mathbf{k}, p) = \frac{k}{\pi}\int \frac{f(v')\, d\mathbf{v}'}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'}$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2}\int \frac{i\mathbf{k}\cdot\partial f/\partial v'\, d\mathbf{v}'}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'}$$
$$= 1 + \frac{1}{(k L_D)^2}\left[1 - \frac{\pi p}{k} U(\mathbf{k}, p)\right].$$

1.3 Fluctuations of electric field

Consider first the total fluctuation

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}t)\, E_\beta(\mathbf{x}t)\rangle = \int D_1(Xt) \sum_{l,n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|}\, dX$$
$$= n e^2 \int \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} f_1(v_1)\, dX_1$$
$$+ n^2 e^2 \int \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} f_2(X_1, X_2)\, dX_1\, dX_2. \quad (24)$$

It is clear that to obtain the lowest order result consistently, f_1 is required to lowest order and f_2 to first order. Substituting the thermal equilibrium functions we obtain the result

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}t)\, E_\beta(\mathbf{x}t)\rangle = (4\pi e)^2 n \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^4}\left\{1 - \frac{1}{[1 + (k L_D)^2]}\right\}. \quad (25)$$

The term $[1 + (k L_D)^2]^{-1}$ comes from the terms in Eq. (24) where $l \neq n$. These terms can be neglected for $k \gg 1/L_D$, but are quite important for $k \ll 1/L_D$. The energy associated with a given $\mathbf{k}$ can be obtained from

$$\frac{\langle \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\rangle}{8\pi} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\Theta}{2}\frac{1}{1 + (k L_D)^2}. \quad (25.1)$$

The energy per degree of freedom in the electric field is evidently $\Theta/2$ for $kL_D \ll 1$ and much less for $kL_D \gg 1$.

To obtain the spectral density consider the ensemble average

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}t)\, E_\beta(\mathbf{x}'t')\rangle$$
$$= \int D_2(Xt; X't') \sum_{l,n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\beta'}\frac{e}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_n'|}\, dX\, dX'$$
$$= \frac{n e^2}{V}\int \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|}\frac{\partial}{\partial x_\beta'}\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1'|}\, W_{11}^{(0)}(X_1 t; X_1' t')\, dX_1\, dX_1'$$
$$+ n^2 e^2 \int \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\beta'}\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2'|}\, W_{12}^{(1)}(X_1 t; X_2' t_2')\, dX_1\, dX_2'.$$

After substituting from Eq. (23) and carrying out the integrations, the result is

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}, t)\, E_\beta(\mathbf{x}', t')\rangle = (4\pi e)^2 n \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{dp}{2\pi i}$$
$$\times \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{p(t'-t)} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^4}\frac{(\pi/k)\,U(\mathbf{k}, p)}{\varepsilon(k, 0)\,\varepsilon(\mathbf{k}, p)}.$$

According to the definitions of Eqs. (12.1) and (14)

$$S^{+}_{\alpha\beta}(k, p) = (4\pi e)^2 n \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \frac{(\pi/k)\,\mathrm{U}(\mathbf{k}, p)}{\varepsilon(k, \mathrm{O})\,\varepsilon(\mathbf{k}, p)} . \qquad (26)$$

The spectral density is therefore

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = 2\,\mathrm{Re}\,[S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)]$$
$$= (4\pi e)^2 n \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \frac{2\pi}{k} \frac{\mathrm{Re}\,[U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)]}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)|^2} \qquad (27)$$

$$U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{k}{\pi\,\mathrm{i}} \int \frac{f(v')\,d\,\mathbf{v}'}{[\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \mathrm{i}\,\lambda]}$$
$$= \frac{k}{\pi\,\mathrm{i}} \int f(v') \left[\pi\,\mathrm{i}\,\delta(\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}') + \mathsf{P}\,\frac{1}{\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}\right] d\mathbf{v}'.$$

If we define $v_{\parallel} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}/k$ and $m\,\bar{v}^2 = \Theta$,

$$F(v_{\parallel}) = \int f(v)\,v_{\perp}\,d\,v_{\perp}\,d\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\bar{v}} \exp\left[-\frac{v_{\parallel}^{\,2}}{\bar{v}^2}\right]$$

$$U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega) = F(-\omega/k) + \frac{\mathrm{i}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(-\omega'/k)\,d\,\omega'}{(\omega' - \omega)}$$

$$= \frac{1}{\bar{v}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{(k\bar{v})^2}\right] - \frac{\mathrm{i}}{\pi}\left(\frac{k\bar{v}}{\omega} + \left(\frac{k\bar{v}}{\omega}\right)^3 - - -\right\} (\omega \gg k\bar{v})$$

$$= \frac{1}{\bar{v}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{(k\bar{v})^2}\right] - \frac{\mathrm{i}}{\pi}\left(\frac{\omega}{k\bar{v}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{k\bar{v}}\right)^3 - - -\right\} (\omega \ll k\bar{v}) .$$
$$(28)$$

When $kL_D \gg 1$, $|\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2 \cong 1$; when $kL_D \ll 1$ and $\omega \gg k\,\bar{v}$

$$|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)|^2 \cong \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{\pi}{2} \frac{1}{(k\,L_D)^6} \exp\left[-\frac{1}{(k\,L_D)^2}\right] .$$
$$(29)$$

In this case the denominator exhibits a resonance at $\omega = \omega_p$. The spectral density $S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ must satisfy the relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha\beta}(k, \omega) \frac{d\,\omega}{2\pi} = \langle E_\alpha(\mathbf{x}\,t)\,E_\beta(\mathbf{x}\,t)\rangle_k ,$$

or

$$\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(-\omega/k)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)|^2}\, d\omega = \frac{(k\,L_D)^2}{1 + (k\,L_D)^2} . \qquad (30)$$

By using the asymptotic forms for $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)$ the integration can easily be carried out and we obtain

$$\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(-\omega/k)\,d\,\omega}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)|^2} \cong 1 \qquad (k\,L_D \gg 1)$$
$$\cong (k\,L_D)^2 \qquad (k\,L_D \ll 1) .$$

By carrying out the integration approximately, making use of asymptotic forms, it is apparent that only values of **k** for which weakly damped plasma oscillations exist are fully excited to the energy $\Theta/2$ per mode. It is possible to carry out the integration exactly by a contour method, but this gives less physical insight. From Eq. (27) it is apparent that $S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ must be an even function of ω. Since

$$2\,\mathrm{S}^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega) = S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\mathrm{i}}{\pi}\,\mathsf{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\omega'}{\omega' - \omega}\, S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega') .$$

and the Hilbert transform of $S_{\alpha\beta}$ is an odd function of ω,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\omega}{2\pi}\, S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\omega}{2\pi}\, 2\,S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)$$
$$= (4\pi e)^2 n \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\varepsilon(k, 0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)} .$$

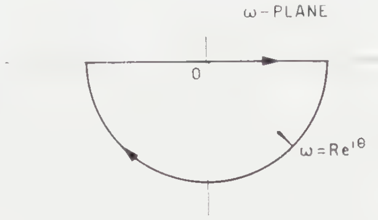

Fig. 1 Contour of integration used in evaluating the integral of Eq. (30).

The most convenient contour of integration is illustrated in Fig. 1. In the lower half of the ω-plane $U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)/\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)$ has no poles. On the boundary circle $\omega = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\lim_{R \to \infty} U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega) = \frac{k}{\mathrm{i}\pi} \frac{1}{\omega}$$

$$\lim_{R \to \infty} \varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{U(k, \mathrm{i}\omega)}{\varepsilon(k, \mathrm{i}\omega)} + \frac{k}{\pi} \int_{\theta=0}^{-\pi} d\,\theta = 0 . \qquad (31)$$

Therefore

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, S_{\alpha\beta}(k, \omega) = (4\pi e)^2 n \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \frac{1}{\varepsilon(k, 0)} ,$$

which agrees with Eq. (25) since $\varepsilon(k, 0)$ is equal to $(k\,L_D)^2/[1 + (k\,L_D)^2]$.

For a plasma consisting of electrons and ions, Eqs. (26) and (27) apply if we define U and ε as follows:

$$U(\mathbf{k}, p) = \frac{k}{\pi} \sum_j \int \frac{f_j(v')\,d\,v'}{p + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'} \qquad (32)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, p) = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^{\,2}}{k^2} \int \frac{(\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\partial f_j/\partial\,\mathbf{v}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{v}'}{p + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'}$$

$$f_j(v') = \left(\frac{m_j}{2\pi\Theta}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_j\,v^2}{2\,\Theta}\right)$$

$$\omega_{pj}^{\,2} = 4\pi n e^2/m_j .$$

1.4 Superposition of dressed particles

Consider the Vlasov equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \qquad (33)$$

where

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \left[\varrho_{\mathrm{ext}} - n e \int f \, d\mathbf{v} + n e \right].$$

Suppose at $t = -\infty$, $f^{(0)} = (m/2\pi\Theta)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-m v^2/2\Theta\right]$ and an external charge density of order e is switched on adiabatically; i.e.,

$$\varrho_{\mathrm{ext}} = \lim_{\lambda \to 0} \varrho(\mathbf{k}, \omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega - \mathrm{i}\lambda)t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

If Eqs. (33) are solved in the usual way, the result is

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi\varrho(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{34}$$

and

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) = f^{(0)}(v) - \frac{e}{m}\, \frac{\mathbf{k}\cdot\partial f^{(0)}/\partial\mathbf{v}}{\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \mathrm{i}\lambda}\, \Phi(\mathbf{x}, t).$$

It is therefore clear that $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)$ may be interpreted as a dielectric constant.

For a test charge $\varrho_{\mathrm{ext}} = -e\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_0 t)$ and $\varrho(\mathbf{k}, \omega) = -e\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}\,\delta(\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0)$. The electric field at a point $\mathbf{x}$ due to a fully "dressed" test particle at $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t$ with velocity $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0$ is

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, X') = 4\pi e \int \frac{dk}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}\, \frac{\mathrm{i}\,\mathbf{k}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')}. \tag{35}$$

If we imagine the particles of the plasma immersed in a dielectric medium characterized by $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)$, then the Coulomb electric field due to a particle is effectively replaced by Eq. (35). If this is done the particles can then be regarded as statistically independent in the following sense:

$$\begin{aligned}
&\langle E_\alpha(\mathbf{x}t)\, E_\beta(\mathbf{x}'t')\rangle \\
&= \frac{n}{V} \int E_\alpha(\mathbf{x}, X_1)\, E_\beta(\mathbf{x}', X_1')\, W_{11}^{(0)}(X_1 t; X_1' t')\, dX_1\, dX_1' \\
&= (4\pi e)^2 n \int \frac{dp}{2\pi\mathrm{i}} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{p(t'-t)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}\, \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \\
&\qquad \times \int \frac{d\mathbf{v}_1\, f(v_1)}{(p + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\, |\varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)|^2}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
2 S_{\alpha\beta}^{+}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega) &= (4\pi e)^2 n\, \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4}\, \frac{2\pi}{k} \\
&\quad \times \left\{ \frac{F(-\omega/k)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)|^2} + \frac{\mathrm{i}}{\pi}\, \mathrm{P}\int_{\infty}^{\infty} \frac{d\omega'\, F(-\omega'/k)}{(\omega' - \omega)\, |\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega')|^2} \right\}.
\end{aligned}$$

This is the same as the previous result and was obtained by "dressing the particles" and neglecting the contribution from $W_{12}^{(1)}(X_1 t; X_2{}'t')$, the correlation of different particles.* Similarly in the calculation of

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}t)\, E_\beta(\mathbf{x}t)\rangle = \int D_1(Xt) \sum_{l\,n} E_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)\, E_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)\, dX$$

we can neglect the terms $l \neq n$, or assume $f_2(X_1 X_2 t) = f(v_1)\, f(v_2)$ provided $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$ is replaced by $\mathbf{E}(\mathbf{x}, X_n)$.

Thus

$$\begin{aligned}
\langle E_\alpha(\mathbf{x}t)\, E_\beta(\mathbf{x}t)\rangle &= n \int f(v_1)\, E_\alpha(\mathbf{x}, X_1)\, E_\beta(\mathbf{x}, X_1)\, d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{v}_1 \\
&= (4\pi e)^2 n \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \int \frac{f(v_1)\, d\mathbf{v}_1\, k_\alpha k_\beta}{k^4 \varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\, \varepsilon(-\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)}.
\end{aligned}$$

With the change of variable $\omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1$ this becomes

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}t)\, E_\beta(\mathbf{x}t)\rangle = (4\pi e)^2 n \int \frac{dk\, d\omega}{(2\pi)^4}\, \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4}\, \frac{2\pi}{k}\, \frac{F(-\omega/k)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)|^2}$$

in agreement with Eq. (27).

1.5 FLUCTUATION-DISSIPATION THEOREM

Consider the Vlasov equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m}\, \mathbf{E}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Suppose that at $t = -\infty$, $f = f^{(0)} = (m/2\pi\Theta)^{\frac{3}{2}} \exp(-m v^2/2\Theta)$ and the electric field is switched on adiabatically, i.e.,

$$\mathbf{E} = \lim_{\lambda \to 0} E_{\|}(\mathbf{k}/k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega - \mathrm{i}\lambda)t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

It is assumed that $\mathbf{E}$ is of order e so that $f = f^{(0)} + f^{(1)}$ where

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m}\, \mathbf{E}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

After solving for $f^{(1)}$, the total current density is determined

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(xt) &= -n e \int \mathbf{v}\, f^{(1)}(\mathbf{x}\,\mathbf{v}; t)\, d\mathbf{v} + \frac{1}{4\pi}\, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
&= j_{\|}(\mathbf{k}/k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}.
\end{aligned}$$

The result for the current amplitude is

$$j_{\|} = (1/z_{\|})\, E_{\|}$$

where

$$\begin{aligned}
z = r_{\|} + \mathrm{i}\, x &= \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)} \\
&= \frac{4\pi}{\omega}\, \frac{1}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)|^2}\, [\operatorname{Im}\varepsilon + \mathrm{i}\operatorname{Re}\varepsilon].
\end{aligned}$$

Since $-\operatorname{Im}\varepsilon = (k L_D)^{-2}(\pi/k)\,\omega\, F(-\omega/k)$, the spectral density of the electric field fluctuations may be expressed as

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = 2\Theta\, r_{\|}\, k_\alpha k_\beta / k^2. \tag{37}$$

1.6 KIRCHHOFF'S RADIATION LAW

The energy density of the electrostatic field is

$$\frac{\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}t)\rangle}{8\pi} = \int \frac{d\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4}\, W(\mathbf{k}, \omega)$$

where

$$W(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi n e^2}{k^2}\, \frac{\pi}{k}\, \frac{F(-\omega/k)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)|^2}.$$

From the previous problem, the absorption coefficient may be defined as follows: the power absorption is

---

* This method of obtaining the spectral density of electric field fluctuation was first pointed out to the author by W. B. Thompson of the Atomic Energy Research Establishment, Harwell, United Kingdom, in a lecture given at General Atomic in January 1960.

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} j_{\parallel} E_{\parallel}^{*}$$
$$= \mathfrak{a}(\mathbf{k}, \omega) \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{E_{\parallel} E_{\parallel}^{*}}{8\pi} .$$

The absorption coefficient is

$$\mathfrak{a}(\mathbf{k}, \omega) = 8\pi \operatorname{Re}(1/z_{\parallel}) = -2\omega \operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)$$
$$= \frac{1}{(k L_D)^2} \frac{2\pi}{k} \omega^2 F(-\omega/k) .$$

According to Kirchhoff's law, we should expect that the emission per unit volume from the plasma would be

$$\mathfrak{e}(\mathbf{k}, \omega) = W(\mathbf{k}, \omega)\, \mathfrak{a}(\mathbf{k}, \omega)$$
$$= 2\pi^2 \frac{\Theta}{(k L_D)^4} \frac{\omega^2}{k^2} \frac{F^2(-\omega/k)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)|^2} . \quad (38)$$

That this is the case can be seen by a direct calculation of the emission. The force on a test particle of velocity $\mathbf{v}'$ is from Eq. (35),

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}') = -e\,\mathbf{E}(\mathbf{x}' X') = -4\pi e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{i}\mathbf{k}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}$$
$$= -4\pi e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|\varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')|^2} .$$

The rate at which the particle loses energy is $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{F}(v')$ which is therefore the rate of emission of energy from one particle. For a plasma in equilibrium there are $n f(v')$ particles in (X', dX') so that the total emission per unit volume is

$$4\pi n e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v}' f(v') \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{k^2} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|\varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')|^2} .$$

If we change the variable of integration to $\omega = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'$ the result is

$$\int \frac{d\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4} \mathfrak{e}(\mathbf{k}, \omega)$$

where $\mathfrak{e}(\mathbf{k}, \omega)$ is given by Eq. (38). Kirchhoff's law has previously been stated for plasma waves [2] in the form

$$\mathfrak{e}(k) = \Theta\, 2\, \varepsilon_L(k) \quad (39)$$

where $\varepsilon_L(k)$ is Landau's damping coefficient. This result is recovered if we integrate Eq. (38) over ω for $kL_D \ll 1$. Eq. (38) is more general than Eq. (39) in that it applies to all wavelengths including $kL_D \gg 1$ in which case plasma waves are very strongly damped.

1.7 Fluctuations of current density

The current density is $\mathbf{j} = -e \sum_n \mathbf{v}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$. The ensemble average of $\langle j_\alpha(\mathbf{x}\, t)\, j_\beta(\mathbf{x}'\, t')\rangle$ is calculated making use of Eq. (23). The result is

$$S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega) = n e^2 \left\{ \frac{\Theta}{m} \frac{\pi}{k} U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega) \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \right.$$
$$\left. + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \mathrm{i}\omega (k L_D)^2 \left[1 - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)} \right] \right\} . \quad (40)$$

The real part of $2 S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)$ is the spectral density

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = n e^2 \left\{ \frac{\Theta}{m} \frac{2\pi}{k} F(-\omega/k) \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi}{k} \frac{\omega^2 F(-\omega/k)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)|^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \right\} . \quad (41)$$

We note that $S_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)$ differs from the corresponding quantity for the electric field by a factor of $(\omega/4\pi)^2$. This could have been anticipated because the spectral density is essentially an ensemble average of the square of Fourier components. According to Maxwell's equations $\mathrm{i}\omega\, \varrho(\mathbf{k}, \omega) + \mathrm{i}\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = 0$, $\mathrm{i}\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi\, \varrho(\mathbf{k}, \omega)$, or $\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = -(\mathrm{i}\omega/4\pi)\, [\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]$. The relationship between the spectral densities is thus apparent.

The above result can also be obtained by a superposition of independent dressed test particles as in Section 1.4. The current density at $\mathbf{x}$ due to a dressed test particle with $X_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1)$ is

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, X_1) = -e\, \mathbf{v}_1\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - n e \int \mathbf{v}\, \delta f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}$$

where [2]

$$\delta f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i} k \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}$$
$$\times \left[\frac{\mathbf{k} \cdot \partial f^{(0)} / \partial \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) - \mathrm{i}\lambda} \right] \left[\frac{1}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)} \right] .$$

Eq. (41) may be obtained as follows:

$$\langle j_\alpha(\mathbf{x}\, t)\, j_\beta(\mathbf{x}', t')\rangle$$
$$= \frac{n}{V} \int j_\alpha(\mathbf{x}, X_1)\, j_\beta(\mathbf{x}.' X_1')\, W^{(0)}(X_1 t; X_1' t_1)\, d X_1\, d X'_1$$
$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \mathrm{e}^{p(t' - t)} S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, p) .$$

Substituting $W_{\parallel}^{(0)}$ from Eq. (23) we obtain the same result for $2 \operatorname{Re} S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)$ as Eq. (41).

A fluctuation dissipation theorem exists for the current density that involves a different dissipation tensor from that previously employed for the electric field fluctuations. It is defined as follows:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m} \left[\mathbf{E}_{\text{ext}} - \nabla \Phi \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi e n \left[\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{t})\, d\mathbf{v} - 1 \right] .$$

At $t = -\infty$, $f = f^{(0)}(v)$ and an external electric field of order e is switched on adiabatically, i.e.,

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{x}\, t) = \lim_{\lambda \to 0} \mathbf{E}(\mathbf{k}\, \omega)\, \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\lambda t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} .$$

We can calculate the conduction current as

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}\, t) = -n e \int \mathbf{v} f^{(1)}(\mathbf{x}\, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}$$
$$= \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} .$$

where

$$j_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)\, E_\beta(\mathbf{k}, \omega)$$

and

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega) = \frac{n e^2}{\Theta} \left\{ \frac{\Theta}{m} \frac{\pi}{k} U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \mathrm{i}\omega (k L_D)^2 \left[1 - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)} \right] \right\} .$$

The theorem for current fluctuations is

$$S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega) = \Theta\, \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega) \quad (42)$$

or

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = 2\,\Theta \operatorname{Re}[\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)] .$$

1.8 FLUCTUATIONS WITH A CONSTANT MAGNETIC FIELD

The calculations in this case follow the same pattern as in the case of zero magnetic field. The only new feature is the addition of the term $-(e/m\,c)\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot(\partial f/\partial \mathbf{v})$ to the Vlasov equations. The resultant spiral unperturbed orbits make the calculations considerably more involved. However, no new techniques are required so that we shall simply discuss the results.

The dielectric constant is

$$\varepsilon(\mathbf{k}, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2}\int d\,\mathbf{v} \sum_n \frac{J_n^2(k_\perp a)\,\mathrm{i}\,[\mathbf{k}\cdot\partial f/\partial \mathbf{v}]_n}{p + \mathrm{i}\,[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n} \qquad (43)$$

where

$$\left[\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right]_n = k_z\frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{n}{a}\frac{\partial f}{\partial v_\perp}$$

$$[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n = k_z v_z + \frac{n}{a}v_\perp$$

$$a = v_\perp/\omega_c$$

$$\omega_c = e\;B/mc.$$

We note that

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) = 1 + \frac{1}{(k\,L_D)^2}$$

as in the case of zero magnetic field. The other function required to express the results is

$$U(\mathbf{k}, p) = \frac{k}{\pi}\int d\,\mathbf{v}\,f(\mathbf{v}) \sum_n \frac{J_n^2(k_\perp a)}{p + \mathrm{i}\,[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n}$$

with this definition

$$\varepsilon(\mathbf{k}, p) = 1 + (k\,L_D)^{-2}\,[1 - (\pi\,p/k)\;U(\mathbf{k}, p)].$$

The joint probability functions are as follows:

$$W_{\|}^{(0)}(X_1 t; X_1'\,t') = V f(v_1)\,\delta\,[\mathbf{x}_1' - \mathbf{x}(t')]\;\delta\,[\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}(t')] \qquad (44)$$

where $\tau = t' - t$ and

$$\mathbf{v}(t') = -v_{1\perp}\sin(\beta_1 + \omega_c\,\tau)\,\mathbf{e}_x + v_{1\perp}\cos(\beta_1 + \omega_c\,\tau)\,\mathbf{e}_y + v_{1\,z}\,\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{x}(t') = \mathbf{x}_1 + a\,[\cos(\beta_1 + \omega_c\,\tau) - \cos\beta_1])\,\mathbf{e}_x + a\,[\sin(\beta_1 + \omega_c\,\tau) - \sin\beta_1]\,\mathbf{e}_y + v_{1\,z}\,\tau\,\mathbf{e}_z.$$

$$W_{12}^{(0)}(X_1\,t; X_2'\,t') = f(v_1)\,f(v_2')$$

$$W_{12}^{(1)}(X_1\,t; X_2'\,t') = f(v_1)\,f(v_2')\int\frac{d\,\mathbf{k}}{(2\,\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1)} \times \int\frac{d\,p}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{p\,(t'-t)}\;W_{pk}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2')$$

$$W_{pk}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\exp\{-i\,[k_\perp a_2\cos(\beta_2 - \alpha) - k_\perp a_1\cos(\beta_1 - \alpha)]\}}{n\,(k\,L_D)^2\,\varepsilon(k, 0)} \times \sum_{n_1, n_2}\frac{\mathrm{i}^{n_2 - n_1}J_{n_1}(k_\perp a_1)\,J_{n_2}(k_\perp a_2)}{[p + \mathrm{i}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2)_{n_2}]}\exp\{i\,[n_2(\beta_2 - \alpha) - n_1(\beta_1 - \alpha)]\} \times \left\{1 + \frac{\mathrm{i}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2)_{n_2}}{p + \mathrm{i}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)_{n_1}}\left[1 - \frac{\mathrm{i}\,(\mathbf{k}\cdot v_1)_{n_1}\,(\pi/k)\;U(\mathbf{k}, p)}{(k\,L_D)^2\,\varepsilon(\mathbf{k}, p)}\right]\right\}.$$

Most of the previous results for zero magnetic field are recovered in the following sense; results that depend only on $\mathbf{k}$ and p remain formally the same, but with the new definitions of $U(\mathbf{k}, p)$ and $\varepsilon(\mathbf{k}, p)$. The expressions that contain position and velocity coordinates are formally similar with the exception of the Bessel-function sums and the angular factors produced by the spiral orbits. For example, the electric field at $\mathbf{x}$ due to a fully dressed particle at position $\mathbf{x}$ and velocity $\mathbf{v}'$ is

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, X') = 4\,\pi e\int\frac{d\,\mathbf{k}}{(2\,\pi)^3}\,\frac{\mathrm{i}\,\mathbf{k}}{k^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \sum_{n, n'}\frac{J_n(k_\perp a')\,J_{n'}(k_\perp a')\,\mathrm{i}^{n-n'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n')(\beta' - \alpha)}}{\varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\,[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}']_n)}. \qquad (45)$$

This is to be compared with Eq. (35). The spectral density of electric field fluctuations can be calculated in the manner of Eq. (36).

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}\,t)\;E_\beta(\mathbf{x}'\,t')\rangle = \frac{n}{V}\int E_\alpha(x, X_1)\,E_\beta(x'; X_1')\,W_{11}^{(0)}(X_1 t; X_1' t')\,d\,X_1\,d\,X_1' = \int\frac{d\,p}{2\pi\,\mathrm{i}}\int\frac{d\,\mathbf{k}}{(2\,\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\mathrm{e}^{p\tau}\,S_{\alpha\beta}^{+}(\mathbf{k}, p).$$

The result for $S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = 2\;\mathrm{Re}\;S_{\alpha\beta}^{+}(\mathbf{k}, i\omega)$ is

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = (4\,\pi\,e)^2\,n\,\frac{k_\alpha k_\beta}{k^4}\,\frac{2\pi}{k}\,\frac{\mathrm{Re}\,U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)}{|\,\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)\,|^2}$$

which is formally the same as Eq. (27).

As in Section 1.5, a resistance can be defined. The only modification is the addition of the Lorentz force term to the Vlasov equation. The result is formally the same, i.e.,

$$r = \frac{(4\,\pi\,e)^2\,n}{k^2\,\Theta}\,\frac{\pi}{k}\,\mathrm{Re}\,\frac{U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)}{|\,\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)\,|^2}$$

so that, as before,

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = 2\;\Theta\;r_{\|}\;k_\alpha\;k_\beta/k^2.$$

Similarly the formal expressions for Kirchhoff's law in Section 1.6 are unaltered.

The current density fluctuations are somewhat more involved so that a more detailed discussion will be given. The ensemble average is

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\;\mathbf{j}(\mathbf{x}', t')\rangle = (ne^2/V)\int W_{11}^{(0)}(X, t; X_1'\,t)\;\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\;\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1')\;\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_1'\,dX_1\,dX_1' + n^2e^2\int W_{12}^{(1)}(X_1\,t; X_1'\,t')\;\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\;\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2')\;\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2'\,dX_1\,dX_2'. \qquad (46)$$

$W_{11}^{(0)}$ and $W_{12}^{(1)}$ are given by Eq. (44). It is convenient to express all vectors and tensors in terms of the unit vectors

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}/k,\; \mathbf{e}_2 = \mathbf{k}\times\mathbf{B}/(k_\perp B) \text{ and } \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}\times\mathbf{B}\times\mathbf{k}/(kk_\perp B).$$

The cartesian components of $\mathbf{k}$, $\mathbf{v}$ and $\mathbf{B}$ are $(k_\perp\cos\alpha,\; k_\perp\sin\alpha,\; k_z)$; $(-v_\perp\sin\beta,\; v_\perp\cos\beta,\; v_z)$; and $(0, 0, B)$.

Therefore $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{e}_1 + v_2\,\mathbf{e}_2 + v_3\,\mathbf{e}_3$

where
$$v_1 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1 = \frac{1}{k}\,[k_z\,v_z - k_\perp\,v_\perp\,\sin(\beta - \alpha)]$$
$$v_2 = -\,v_\perp\,\cos(\beta - \alpha)$$
$$v_3 = \frac{k_\perp}{k}\,v_z + \frac{k_z}{k}\,v_\perp\,\sin(\beta - \alpha).$$

We can associate with these components certain symbolic components

$$v_1^{(n)} = (k_z\,v_z + n\,\omega_c)/k$$
$$v_2^{(n)} = \mathrm{i}\,v_\perp\,J_n'\,(k_\perp\,a)/J_n\,(k_\perp\,a)$$
$$v_3^{(n)} = \frac{k_\perp}{k}\,v_z - \frac{k_z}{k\,k_\perp}\,n\,\omega_c.$$

The purpose of the symbolic components is to express quantities like $v_\alpha \exp\,[\mathrm{i}\,k_\perp a\cos(\beta - \alpha)]$ in terms of Bessel-function sums. For example,

$$v_1 \exp\,[\mathrm{i}\,k_\perp\,a\,\cos(\beta - \alpha)]$$
$$= \sum_n J_n\,(k_\perp\,a)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,(\beta - \alpha + \pi/2)}\,[k_z\,v_z - k_\perp\,v_\perp\,\sin(\beta - \alpha)]/k$$
$$= \sum_n J_n\,(k_\perp\,a)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,(\beta - \alpha + \pi/2)}\,v_1^{(n)}.$$

The result for Eq. (46) is

$$\langle \mathbf{j}\,(\mathbf{x}\,t)\,\mathbf{j}\,(\mathbf{x}',\,t')\rangle = \int \frac{d\,\mathbf{k}}{(2\,\pi)^3} \int \frac{d\,p}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\mathrm{e}^{p\,\tau}$$
$$\times \sum_{\alpha\beta} S^+_{\alpha\beta}\,(k,\,p)\,\mathbf{e}_\alpha\,\mathbf{e}_\beta$$

where

$$S^+_{\alpha\beta}\,(k,\,p) = n\,e^2 \int f^{(0)}\,(v)\,d\,\mathbf{v} \sum_n \frac{J_n^2\,(k_\perp\,a)\,v_\alpha^{(n)}\,v_\beta^{(n)*}}{p + \mathrm{i}\,k\,v_1^{(n)}}$$
$$+ \frac{n\,e^2\,p}{(k\,L_D)^2\,\varepsilon\,(\mathbf{k},\,p)} \int f^{(0)}\,(v)\,d\,\mathbf{v} \sum_n \frac{J_n^2\,(k_\perp\,a)\,v_\alpha^{(n)}}{p + \mathrm{i}\,k\,v_1^{(n)}}$$
$$\cdot \int f^{(0)}\,(v)\,d\,\mathbf{v} \sum_n \frac{J_n^2\,(k_\perp\,a)\,v_\beta^{(n)*}}{p + \mathrm{i}\,k\,v_1^{(n)}}\,. \quad (47)$$

A conductivity tensor is defined as follows:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m\,c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{m}\,(\mathbf{E} - \nabla\Phi)\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$
$$\nabla^2\,\Phi \quad 4\,\pi\,ne\left[\int f\,dv - 1\right].$$

At $t = -\,\infty$, $f = f^{(0)}\,(v)$ and the external field

$$\mathbf{E}\,(\mathbf{x},\,t) = \lim_{\lambda\to 0} \mathbf{E}\,(\mathbf{k},\,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega - \mathrm{i}\,\lambda)\,t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

is switched on adiabatically, E is of order [e].

The linear response is calculated and

$$j_\alpha\,(\mathbf{x},\,t) = -\,ne \int v_\alpha\,\delta\,f\,(\mathbf{x},\,\mathbf{v},\,t)\,d\,\mathbf{v}$$
$$= j_\alpha\,(\mathbf{k},\,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})};$$
$$j_\alpha\,(\mathbf{k},\,\omega) = \sigma_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k},\,\mathrm{i}\omega)\,E_\beta\,(\mathbf{k},\,\omega).$$

Placing $p = \mathrm{i}\omega$, the result for $\sigma_{\alpha\beta}$ is

$$\sigma_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k},\,p)$$
$$\frac{n\,e^2}{\Theta}\left\{\int \mathrm{d}\,\mathbf{v}\,f^{(0)}\,(v)\,v_\alpha \int_0^\infty v_\beta'\,(-\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot[\mathbf{x}'(-\tau) - \mathbf{x}]}\,\mathrm{e}^{-p\,\tau}\,d\,\tau\right.$$
$$-\,\frac{1}{(k\,L_D)^2\,\varepsilon\,(\mathbf{k},\,p)} \int \mathrm{d}\,\mathbf{v}\,f^{(0)}\,(v)\,v_\alpha$$
$$\times \int_0^\infty \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'\,(-\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot[\mathbf{x}'(-\tau) - \mathbf{x}]}\,\mathrm{e}^{-p\,\tau}\,d\,\tau$$
$$\left.\cdot \int_0 \mathrm{d}\,\mathbf{v}\,f^{(0)}\,(v) \int v_\beta'\,(-\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot[\mathbf{x}'(-\tau) - \mathbf{x}]}\,\mathrm{e}^{-p\,\tau}\,d\,\tau\right\}. \quad (48)$$

The orbit functions $\mathbf{x}'\,(\tau)$, $\mathbf{v}'\,(\tau)$ are given by Eq. (44). After making Bessel function expansions and carrying out the angular integrations, we find that $S^+_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k},\,p) = = \Theta\,\sigma_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k},\,p)$ which is the fluctuation dissipation theorem.

In order to establish a superposition principle, consider the Hermitian spectral density

$$S_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k},\,\omega) = S^+_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k},\,\mathrm{i}\omega) + [S^+_{\beta\alpha}\,(\mathbf{k},\,\mathrm{i}\omega)]^*$$

and substitute

$$\frac{1}{\omega + k\,v_1^{(n)}} = \pi\,\mathrm{i}\,\delta\,(\omega + kv_1^{(n)}) + \frac{\mathsf{P}}{\omega + k\,v_1^{(n)}}$$

into Eq. (47). The result is

$$S_{\alpha\beta}\,(\mathbf{k},\,\omega) = 2\pi\,n\,e^2 \int d\,\mathbf{v}\,f^{(0)}\,(v)$$
$$\sum_n J_n^2\,(k_\perp\,a)\,v_\alpha^{(n)}\,v_\beta^{(n)*}\,\delta\,[\omega + k\,v_1^{(n)}]$$
$$+ \frac{n\,e^2}{(k\,L_D)^2}\left\{\frac{\mathrm{i}\,\omega}{\varepsilon\,(\mathbf{k},\,\mathrm{i}\,\omega)}\,(\xi_\alpha - \mathrm{i}\,\eta_\alpha)\,(\xi_\beta^* - \mathrm{i}\,\eta_\beta^*)\right.$$
$$\left. -\,\frac{\mathrm{i}\,\omega}{\varepsilon^*\,(\mathbf{k},\,\mathrm{i}\,\omega)}\,(\xi_\alpha + \mathrm{i}\,\eta_\alpha)\,(\xi_\beta^* + \mathrm{i}\,\eta_\beta^*)\right\}$$

where

$$\xi_\alpha\,(\mathbf{k},\,\omega) = \pi \sum_n \int d\,\mathbf{v}\,f^{(0)}\,(v)\,J_n^2\,(k_\perp\,a)\,v_\alpha^{(n)}\,\delta\,[\omega + k\,v_1^{(n)}]$$
$$\eta_\alpha\,(\mathbf{k},\,\omega) = \sum_n \mathsf{P} \int d\,\mathbf{v}\,\frac{f^{(0)}\,(v)\,J_n^2\,(k_\perp\,a)\,v_\alpha^{(n)}}{[\omega + k\,v_1^{(n)}]}\,.$$

This can be put in a more suggestive form by introducing the effective velocity

$$\delta\,V_\alpha\,(\mathbf{k},\,\mathrm{i}\omega) = -\,\frac{1}{(kL_D)^2}\,\frac{\mathrm{i}\,\omega}{\varepsilon\,(\mathbf{k},\,\mathrm{i}\,\omega)}\,[\xi_\alpha - \mathrm{i}\,\eta_\alpha]\,,$$

in terms of which

$$S_{\alpha\beta}\,(k,\,\omega) = 2\pi\,ne^2 \int d\,\mathbf{v}\,f^{(0)}\,(v) \sum_n J_n^2\,(k_\perp\,a)\,\delta\,[\omega + k\,v_1^{(n)}]$$
$$\times\,[v_\alpha^{(n)} - \delta\,V_\alpha]\,[v_\beta^{(n)} - \delta\,V_\beta]^*\,. \quad (49)$$

We shall now obtain this result by superposing independent dressed test particles. The current density at $\mathbf{x}_0$ due to a dressed test particle at X can be found by solving the test particle problem [2].

$$j_\alpha(\mathbf{x}_0, X) = -e v_\alpha \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) - ne\int v_\alpha \delta f \, d\mathbf{v}$$
$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})} I_\alpha(\mathbf{k}, v)$$

where

$$I_\alpha(\mathbf{k}, v) = -e\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\perp a\cos(\beta-\alpha)} \sum_n J_n(k_\perp a)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\beta-\alpha+\pi/2)}$$
$$\times \left\{ v_\alpha^{(n)} - \frac{v_1^{(n)}}{(k L_D)^2 \varepsilon(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\mathbf{k} v_1^{(n)})} \sum_m \int d\mathbf{v}' \frac{f^{(0)}(v') J_m^2(k_\perp a') v_\alpha'^{(m)}}{[v_1'^{(m)} - v_1^{(n)} - \mathrm{i}\lambda]} \right\}$$
$$= -e\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\perp a\cos(\beta-\alpha)} \sum_n J_n(k_\perp a)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\beta-\alpha+\pi/2)}$$
$$\times \{ v_\alpha^{(n)} - \delta V_\alpha(\mathbf{k}, -\mathrm{i}\mathbf{k} v_1^{(n)}) \} \,. \quad (50)$$

We can now compute

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{j}(\mathbf{x}'\, t') \rangle$$
$$= \frac{n}{V} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}, X_1)\, \mathbf{j}(\mathbf{x}', X'_1)\, W_{11}^{(0)}(X_1 t; X_1'\, t')\, dX_1\, dX_1'$$
$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp}{2\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{e}^{p\tau} \sum_{\alpha\beta} S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, p)\, \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \,.$$

The result is

$$S^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, p) = n e^2 \int f(v)\, d\mathbf{v} \sum_n \frac{J_n^2(k_\perp a)}{p + \mathrm{i}k v_1^{(n)}}$$
$$\times [v_\alpha^{(n)} - \delta V_\alpha(\mathbf{k}, -\mathrm{i}k v_1^{(n)})]$$
$$\times [v_\beta^{(n)} - \delta V_\beta(\mathbf{k}, -\mathrm{i}k v_1^{(n)})]^* \,.$$

The Hermitian spectral density clearly agrees with Eq. (49). The anti-Hermitian spectral density is the Hilbert transform of the Hermitian spectral density so that the superposition of dressed test particles gives completely equivalent results.

2. Non-equilibrium states with Coulomb forces

2.1 INTRODUCTION

A hot plasma may exist in a state quite different from thermodynamic equilibrium for a substantial length of time. Indeed, it is upon this fact that the hope for fusion power is based. Such states are approximately stationary and it is of some interest to consider fluctuations.

The states about which we shall examine fluctuations are stationary in the sense of our expansion. They will be adequately described for our present purposes by specifying the one-body distribution function to lowest order. This in turn uniquely determines the two-body correlation function. For example the one-body distribution function will be a solution of

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{n e^2}{m} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f^{(0)}(X')\, dX' \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \,. \quad (1)$$

We shall consider only spatially homogeneous solutions $f^{(0)} = f^{(0)}(\mathbf{v})$. There are two restrictions on the function $f^{(0)}(\mathbf{v})$. First of all, there must be no current density

$$\mathbf{j} = -ne\int f^{(0)}(\mathbf{v})\, \mathbf{v}\, d\mathbf{v} = 0,$$

because the magnetic field term is absent in Eq. (1).

Second, the secular equation

$$\varepsilon(\mathbf{k}, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \partial f_1^{(0)}/\partial \mathbf{v}}{p + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}\, d\mathbf{v} = 0 \,,$$

must have no roots in which p has a positive real part, i.e., the state $f^{(0)}(\mathbf{v})$ must be stable.

The two-body correlation function satisfies the equation

$$\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right) P(X, X')$$
$$- \frac{n e^2}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} P(X', X'')\, dX''$$
$$- \frac{n e^2}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{v}'} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} P(X, X'')\, dX''$$
$$= \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \left[f_1^{(0)}(\mathbf{v}') \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} - f_1^{(0)}(\mathbf{v}) \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{v}'} \right] . \quad (2)$$

This equation determines $P(X, X')$ when $f_1^{(0)}(\mathbf{v})$ is given [3]. This information is sufficient to determine the auto-correlation function and spectral density for any quantity such as electric field or current density. Calculations will be made for a plasma consisting of electrons and infinite-mass ions, electrons and finite-mass ions and then a constant magnetic field will be added.

2.2 JOINT PROBABILITY FUNCTIONS

This treatment will be quite similar to Section 1.2. It is however more convenient to introduce conditional probability functions for our present purposes, so that we shall repeat some of the previous discussion. The function $D_2(Xt; X't')$ satisfies the Liouville equation in the co-ordinates X', t' and the initial conditions

$$D_2(Xt; X't) = D_1(Xt)\, \delta(X' - X).$$

The function $C(Xt \mid X't')$ is defined by integrating out all initial co-ordinates but one, i.e.,

$$f_1(X_1 t)\, C(X_1 t \mid X'\, t') = V\int D_2(X t; X' t')\, (dX)^{N-1} \quad (3)$$

where

$$f_1(X_1 t) = V\int D_1(X t)\, (dX)^{N-1}$$

$C\,(X_1 t \mid X' t')$ satisfies the Liouville equation in (X', t') and the initial condition

$$C\,(X_1 t \mid X' t) = V\, D_1\,(X' t)\,\delta\,(X'_1 - X_1)/f_1\,(X_1, t). \qquad (4)$$

The s-body functions are defined as in Section 1:

$$F_s\,(X_1 t \; X_2' - - X'_{s+1}, t') = V^s \int C\,(X_1 t \mid X' t')\, d X_1'\, dX'_{s+2} - - d X_N'$$

$$\Omega_s\,(X_1 t \; X_1' - - X_s', t') = V^s \int C\,(X_1 t \mid X' t')\, d X'_{s+1} - - d X_N'$$

$$f_s\,(X_1 - - X_s; t) = V^s \int D_1\,(X t)\,(d X)^{N-s}$$

The initial conditions for one- and two-body functions are as follows

$$\Omega_1\,(X_1' t) = V\,\delta\,(X_1' - X_1)$$
$$\Omega_2\,(X_1', X_2'; t) = V\,\delta\,(X_1' - X_1)\, f_2\,(X_1, X_2'; t)/f_1\,(X_1 t)$$
$$F_1\,(X_2', t) = f_2\,(X_1 X_2'; t)/f_1\,(X_1 t) \qquad (5)$$
$$F_2\,(X_2' X_3'; t) = f_3\,(X_1, X_2', X_3'; t)/f_1\,(X_1 t).$$

(The abbreviated notation $\Omega_1\,(X_1' t')$ will be employed instead of $\Omega_1\,(X_1 t \mid X_1' t')$ wherever this can be accomplished without confusion.)

F_s and Ω_s are determined by taking moments of the Liouville equation and then expanding; i.e.,

$$F_s = F_s^{(0)} + F_s^{(1)} + \ldots.$$

where the parameter of expansion is e, m, or $1/n$. This procedure has been carried out in detail for the test-particle problem [2]. Essentially the same equations apply to the present problem. However the initial conditions are different in the present case; in particular we do not wish to assume that the field particles are initially in thermal equilibrium. It is assumed that a partial specification of the initial density in phase space $D_1\,(Xt)$ is given in terms of its moments. For a spatially homogeneous plasma

$$f_1\,(X_1 t) = f_1^{(0)}\,(\mathbf{v}_1) + f_1^{(1)}\,(\mathbf{v}_1 t) = f_1\,(\mathbf{v}_1 t)$$
$$f_2\,(X_1 X_2 t) = f_1\,(\mathbf{v}_1 t)\, f_1\,(\mathbf{v}_2 t) + P\,(X_1, X_2)$$
$$f_3\,(X_1 X_2 X_3; t) = f_1\,(\mathbf{v}_1 t)\, f_1\,(\mathbf{v}_2 t)\, f_1\,(\mathbf{v}_3 t) + f_1^{(0)}\,(\mathbf{v}_1)\, P\,(X_2 X_3) + f_1^{(0)}\,(\mathbf{v}_2)\, P\,(X_1, X_3) + f_1^{(0)}\,(\mathbf{v}_3)\, P\,(X_1, X_2). \qquad (6)$$

$P\,(X_1, X_2)$ is first order in the expansion parameter, symmetric with respect to the interchange of X_1 and X_2, and depends on the spatial co-ordinates only as $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. It is determined by $f_1^{(0)}\,(\mathbf{v}_1)$ according to Eq. (1). It is convenient to introduce a conditional probability defined by

$$P\,(X_1, X_2) = f_1^{(0)}\,(v_1)\, G\,(X_1 \mid X_2) \qquad (7)$$

For present purposes it is necessary to calculate Ω_1 to zero order and F_1 to first order. The required initial conditions are from Eqs. (5) and (6)

$$\Omega_1^{(0)}\,(X_1' t) = V\,\delta\,(X_1' - X_1)$$
$$F_1^{(0)}\,(X_2' t) = f_1^{(0)}\,(\mathbf{v}_2') \qquad (8)$$
$$F_1^{(1)}\,(X_2' t) = f_1^{(1)}\,(v_2' t) + G\,(X_1 \mid X_2').$$

The zero-order functions satisfy the differential equation

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}_1' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1'} - \frac{e}{m}\,\mathbf{E}_{M^{(0)}}\,(\mathbf{x}_1', t') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1'} \right\} \begin{matrix} \Omega_1^{(0)}\,(X_1', t') \\ F_1^{(0)}\,(X_1', t') \end{matrix} = 0. \qquad (9)$$

where

$$\mathbf{E}_{M^{(0)}}\,(x_1' t') = n e \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1'}\, \frac{1}{|\mathbf{x}_1' - \mathbf{x}_2'|}\, F_1^{(0)}\,(X_2' t')\, d X_2'.$$

The solutions are

$$\Omega_1^{(0)}\,(X_1' t') = V\,\delta\,[\mathbf{x}_1' - \mathbf{x}_1 - \mathbf{v}_1\,(t' - t)]\,\delta\,(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1)$$
$$F_1^{(0)}\,(X_2' t') = f_1^{(0)}\,(\mathbf{v}_2'). \qquad (10)$$

The equation for the first order contribution to F_1 is

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}_2' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2'} \right\} F_1^{(1)}\,(X_2' t') - \frac{e^2}{m}\, \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial v_2'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2'} \times \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1 - \mathbf{v}_1 (t' - t)|} + n \int \frac{F_1^{(1)}\,(X_3' t')}{|\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_3'|}\, d X_3' \right\} = \mathsf{St}\,\{F_1\}. \qquad (11)$$

This is the usual equation for the field particle distribution [2] except for the term $\mathsf{St}\,\{F_1\}$. The form of this collision operator is

$$\mathsf{St}\{F_1\} = \frac{n e^2}{m} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2'}\, \frac{1}{|\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_3'|} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2'}\, P\,(X_2', X_3'; t')\, d X_3'.$$

$P\,(X_2', X_3'; t')$ depends only on $\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_3'$ so that $\mathsf{St}\{F_1\}$ is independent of spatial co-ordinates.

The solution of Eq. (11) subject to the initial condition of Eq. (8) is obtained in the usual way [2] by integrating along the characteristic or unperturbed orbits and making use of Fourier and Laplace transforms. The result is

$$F_1^{(1)}\,(X_2' t') = f_1^{(1)}\,(v_2' t) + \int_{t''=t}^{t'} \mathsf{St}\,\{F_1\}\, dt''$$
$$+ \frac{1}{n} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_1)} \int_{\gamma - \mathrm{i}\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\infty} \frac{d p}{2\pi \mathrm{i}}\, \frac{\mathrm{e}^{p (t' - t)}}{p + \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2'} \left\{ n\, G_k\,(\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2') + \frac{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \partial f_1^{(0)}/\partial \mathbf{v}_2'}{\varepsilon\,(\mathbf{k}, p)}\, \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{1}{p + \mathrm{i}\,(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)} + n \int \frac{G_k\,(\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v})}{(p + \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}\, d\mathbf{v} \right] \right\} \qquad (12)$$

In this expression,

$$\varepsilon\,(\mathbf{k}, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \partial f^{(0)}/\partial \mathbf{v}}{p + \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}\, d\mathbf{v}$$

and $G_k\,(\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2)$ is defined such that

$$G\,(X_1 \mid X_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}\, G_k\,(\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2).$$

The particular moments of $D_2\,(Xt; X't')$ that are usually required are

$$W_{ij}\,(X_i t; X_j' t') = V^2 \int D_2\,(X t; X' t')\,(d X)^{N-1}\,(d X')^{N-1}.$$

The only two independent moments are

$$W_{11}\,(X_1 t; X_1' t') = f_1\,(X_1 t)\,\Omega_1\,(X_1 t \mid X_1' t'),$$
$$W_{12}\,(X_1 t; X_2' t_2) = f_1\,(X_1 t)\, F_1\,(X_1 t \mid X_2' t').$$

We shall require W_{11} only to zero order and W_{12} to first order. The results for these quantities are as follows

$$W_{11}^{(0)}(Xt_1;\, X_1{}'t') = V\, f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1)\, \delta\left[x_1{}' - \mathbf{x}_1 - \mathbf{v}_1(t'-t)\right] \delta\left[\mathbf{v}_1{}' - \mathbf{v}_1\right] \tag{13}$$

$$W_{12}^{(0)}(X_1 t;\, X_1{}'t') = f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1)\, f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_2{}')$$

$$W_{12}^{(1)}(Xt_1;\, X_1{}'t') = f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1) f_1{}^{(1)}(\mathbf{v}_2{}'t') + f_1{}^{(1)}(\mathbf{v}_1 t) f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_2{}') + f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1) \int_{t''\,t}^{t'} \mathsf{St}\{F_1\}\, dt'' + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_2{}'-\mathbf{x}_1)} \int \frac{dp}{2\pi i}\, e^{p(t'-t)} W_{pk}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2{}'),$$

where

$$W_{pk}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{(p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2)} \left\{ n P_k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \frac{\mathbf{k}\cdot\partial f^{(0)}/\partial\mathbf{v}_2}{\varepsilon(\mathbf{k}, p)}\; i\, \frac{\omega_p{}^2}{k^2} \left[\frac{f^{(0)}\,\mathbf{v}_1}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1} + n \int \frac{P_k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v})}{(p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}\, d\mathbf{v} \right] \right\}$$

and $P_k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1)\, G_k(\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2)$.

With the present restriction to a spatially homogeneous plasma, there is never any contribution from $W_{12}^{(0)}$ or the first three terms of $W_{12}^{(1)}$. They will henceforth be simply omitted.

For some applications additional moments are required of $D_2(Xt;\, X't')$ such as

$$W_{ijk}(X_i, X_j t;\, X_k{}'t') = V^3 \int D_2(Xt, X't')(dX)^{N-2}(dX')^{N-1} \tag{14}$$

The independent functions are W_{121}, W_{122} and W_{123} which are obtained by a simple generalization of the procedure employed to calculate W_{11} and W_{12}. The problem is one of two singled-out test particles, which to the order considered in the present calculations, do not interact. The results are as follows

$$W_{121}^{(0)}(X_1, X_2, t;\, X_1{}'t') = V f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1)\, f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_2)\, \delta\left[\mathbf{x}_1{}' - \mathbf{x}_1 - \mathbf{v}_1(t'-t)\right] \delta\left[\mathbf{v}_1{}' - \mathbf{v}_1\right]$$

$$W_{122}^{(0)}(X_1, X_2, t;\, X_2{}'t') = V f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1) f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_2)\, \delta\left[\mathbf{x}_2{}' - \mathbf{x}_2 - \mathbf{v}_2(t'-t)\right] \delta\left(\mathbf{v}_2{}' - \mathbf{v}_2\right)$$

$$W_{123}^{(1)}(X_1, X_2, t;\, X_3{}'t') = f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_3{}')\, P(X_1, X_2) + f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1)\, W_{23}^{(1)}(X_2 t;\, X_3{}'t') + f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_2)\, W_{13}^{(1)}(X_1 t;\, X_3{}'t') \ldots \tag{15}$$

In the latter expression we have omitted terms such as $f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_3{}')\, f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_2)\, f_1{}^{(1)}(\mathbf{v}_1 t)$, which give no contribution for a spatially homogeneous plasma.

2.3. ELECTRIC FIELD FLUCTUATIONS

The ensemble average is calculated as in Section 1.3:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}t)\, \mathbf{E}(\mathbf{x}'t') \rangle = \int D_2(Xt;\, X't') \sum_{l,n} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \frac{e}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_n{}'|}\, dX\, dX'$$

$$= \frac{ne^2}{V} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1{}'|}\, W_{11}^{(0)}(X_1 t;\, X_1{}'t')\, dX_1\, dX_1{}'$$

$$+ n^2 e^2 \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2{}'|}\, W_{12}^{(1)}(X_1 t;\, X_2{}'t')\, dX_1\, dX_2{}'.$$

After carrying out the integrations as far as possible,

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}t)\, \mathbf{E}(\mathbf{x}'t') \rangle = \int \frac{dp}{2\pi i}\, e^{p\tau} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \mathbf{S}^+(\mathbf{k}, p)$$

where $\tau = t' - t$, $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ and

$$\mathbf{S}^+(\mathbf{k}, p) = (4\pi)^2 n e^2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^4} \times \left\{ \int \frac{d\mathbf{v}_1\, f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1)}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1} + \int \frac{d\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_2}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2} \left(n P_k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + i\, \frac{\omega_p{}^2}{k^2}\, \frac{\mathbf{k}\cdot\partial f_1{}^{(0)}/\partial\mathbf{v}_2}{\varepsilon(\mathbf{k}, p)} \left[\frac{f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1)}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1} + n \int \frac{P_k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}} \right] \right) \right\}.$$

To achieve a more manageable form the following quantities are introduced

$$U(\mathbf{k}, p) = \frac{k}{\pi} \int \frac{f_1{}^{(0)}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}} \qquad h_k(\mathbf{v}) = n \int P_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}')\, d\mathbf{v}'.$$

In terms of these quantities

$$\mathbf{S}^+(\mathbf{k}, p) = (4\pi)^2 n e^2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^4} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, p)} \times \left\{ \frac{\pi}{k} U(\mathbf{k}, p) + \int \frac{h_k{}^*(\mathbf{v}_2)\, d\mathbf{v}_2}{p + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2} \right\}, \tag{16}$$

and

$$\mathbf{S}^+(\mathbf{k}, i\omega) = (4\pi)^2 n e^2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^4} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)} \left\{ \frac{\pi}{k} U(\mathbf{k}, i\omega) + \lim_{\lambda\to 0} \int \frac{h_k{}^*(\mathbf{v}_2)\, d\mathbf{v}_2}{i(\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2 - i\lambda)} \right\}$$

where the interpretation of the integral is such that

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{(\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2 - i\lambda)} = \pi i\, \delta(\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2) + \frac{\mathsf{P}}{\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2}.$$

To make any further progress we must make use of some of the properties of the pair distribution function $P_k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. The Fourier transform of Eq. (2) is

$$\lim_{\lambda\to 0} \left[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - i\lambda\right] n P_k(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\omega_p{}^2}{k^2} \left\{ \left[f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_1) + h_k(\mathbf{v}_1) \right] \frac{\mathbf{k}\cdot\partial f_1{}^{(0)}}{\partial\mathbf{v}_2} - \left[f_1{}^{(0)}(\mathbf{v}_2) + h_k{}^*(\mathbf{v}_2) \right] \frac{\mathbf{k}\cdot\partial f_1{}^{(0)}}{\partial\mathbf{v}_1} \right\}.$$

After dividing by $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - i\lambda$ and integrating over $\mathbf{v}_2$ we obtain an integral equation for $h_k(\mathbf{v}_1)$

$$h_k(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)} \left\{ \left[1 - \varepsilon(\mathbf{k}, -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\right] f^{(0)}(\mathbf{v}_1) + \frac{i\mathbf{k}\cdot\partial f_1{}^{(0)}}{\partial\mathbf{v}_1} \frac{\omega_p{}^2}{k^2} \left[\frac{\pi}{k} U(\mathbf{k}, -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1) + \int \frac{h_k{}^*(\mathbf{v}_2)\, d\mathbf{v}_2}{i\left[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\, i\lambda\right]} \right] \right\}. \tag{17}$$

Let $H_k(u) = \int d\mathbf{v}\, h_k(\mathbf{v})\, \delta(u - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}/k)$, multiply Eq. (17) by $\delta(\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)$ and integrate over $\mathbf{v}_1$. The result is

$$H_k(-\omega/k) = \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)} \left\{ \left[1 - \varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)\right] \mathrm{Re}\, U(\mathbf{k}, i\omega) - \frac{ik}{\pi} \mathrm{Im}\, \varepsilon(\mathbf{k}, i\omega) \left[\frac{\pi}{\mathbf{k}} U(\mathbf{k}, i\omega) + \int \frac{h_k{}^*(\mathbf{v}_2)\, d\mathbf{v}_2}{i(\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2 - i\lambda)} \right] \right\}. \tag{18}$$

We can now substitute this result into Eq. (16) and obtain:

$$\mathbf{S}^{+}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega) = (4\,\pi)^2\, n\, e^2\, \frac{\mathbf{k}\,\mathbf{k}}{k^4}\, \frac{\pi\,\mathrm{i}}{k} \times \left\{ \frac{[1 - \varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)]}{\varepsilon\, \mathrm{Im}\, \varepsilon}\, \mathrm{Re}\, U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega) - \frac{H_k(-\,\omega/k)}{\mathrm{Im}\,\varepsilon} \right\}.$$

Since $\mathbf{S}^{+}$ is a symmetric dyadic, the spectral density is

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega) = 2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{S}^{+}(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)$$

$$= (4\,\pi)^2\, n\, e^2\, \frac{\mathbf{k}\,\mathbf{k}}{k^4}\, \frac{2\,\pi}{k} \left\{ \frac{\mathrm{Re}\, U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)}{|\,\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)\,|^2} + \frac{\mathrm{Im}\, H_k(-\,\omega/\mathbf{k})}{\mathrm{Im}\,\varepsilon} \right\}.$$

It has been previously established by LENARD [3] that $\mathrm{Im}\ H_k(-\,\omega/k) = 0$. The final result is therefore

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega) = (4\,\pi)^2\, n\, e^2\, \frac{\mathbf{k}\,\mathbf{k}}{k^4}\, \frac{2\,\pi}{k}\, \frac{\mathrm{Re}\, U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega)}{|\,\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)\,|^2}\,. \tag{19}$$

This is formally the same as Eq. (27) in Section 1. The previous derivation can easily be generalized to apply to a plasma consisting of electrons and ions. Eq. (19) still applies with the following new definitions

$$U(\mathbf{k}, p) = \frac{k}{\pi} \sum_j \int \frac{f_j^{(0)}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}}{p + \mathrm{i}\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \tag{20}$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, p) = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \int \frac{\mathrm{i}\,\mathbf{k} \cdot \partial f_j^{(0)} / \partial\,\mathbf{v}}{p + \mathrm{i}\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}\, d\mathbf{v}\,.$$

where $\omega_{pj}^2 = 4\,\pi\, ne^2/m_j$ and the summation is over particle species.

To indicate some of the features of non-equilibrium states, the electrostatic energy per degree of freedom will be calculated. That is

$$\frac{\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle}{8\,\pi} = \int \frac{d\,\mathbf{k}\, d\,\omega}{(2\,\pi)^4}\, W(\mathbf{k}, \omega)$$

where

$$W(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\,\pi\, n\, e^2}{k^2}\, \frac{\pi}{k}\, \frac{\mathrm{Re}\, U(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)}{|\,\varepsilon(\mathbf{k}, \mathrm{i}\,\omega)\,|^2}\,, \tag{21}$$

and the energy per degree of freedom is defined as

$$\frac{\Theta(\mathbf{k})}{2} = \int \frac{d\,\omega}{2\pi}\, W(\mathbf{k}, \omega)\,. \tag{22}$$

Consider for example, a plasma in which the electron and ion distribution functions are

$$f_e^{(0)}(\mathbf{v}) = \left(\frac{m_e}{2\,\pi\,\Theta_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp[-\, m_e v^2 / 2\,\Theta_e]$$

$$f_i^{(0)}(\mathbf{v}) = \left(\frac{m_i}{2\,\pi\,\Theta_i} \right)^{\frac{3}{2}} \exp[-\, m_i v^2 / 2\,\Theta_i]\,,$$

where $\Theta_i \ll \Theta_e$. Asymptotic forms for U and ε can be employed in various regions of ω, k space as illustrated in Fig. 2. The following definitions are employed

$$m_e v_e^2 = \Theta_e \qquad \frac{1}{L_e^2} = \frac{4\,\pi\, n\, e^2}{\Theta_e}$$

$$m_i v_i^2 = \Theta_i \qquad \frac{1}{L_i^2} = \frac{4\,\pi\, n\, e^2}{\Theta_i}\,.$$

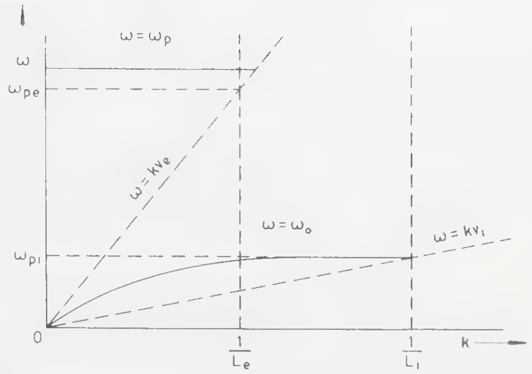

Fig. 2 Asymptotic forms for U and ε in various regions of ω, k space.

i) *Plasma wave region*: If $k < 1/L_e$ and $\omega > k v_e$, the asymptotic forms are as follows:

$$\mathrm{Re}\, U(k, \mathrm{i}\omega) \cong \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\, v_e^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k\, v_e}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\, v_i^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k\, v_i}\right)^2}$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\, v_e^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k\, v_e}\right)^2}, \qquad \text{since } \frac{\omega}{k\, v_i} \gg \frac{\omega}{k\, v_e}\,.$$

$$|\,\varepsilon(k, \mathrm{i}\omega)\,|^2 \simeq \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \right]^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega}{k\, v_e} \right)^2 \frac{1}{(k\, L_e)^4}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{\omega}{k\, v_e}\right)^2},$$

where $\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$. The denominator in Eq. (21) has a resonance at $\omega = \omega_p$. The result obtained from integrating across this resonance is

$$\frac{\Theta(k)}{2} = \frac{\Theta_e}{2} \text{ for } k < \frac{1}{L_e}\,. \tag{23}$$

ii) *Ion wave region*: If $k L_i < 1$ and $k v_e > \omega > k v_i$, the asymptotic forms are as follows

$$\mathrm{Re}\, U(k, \mathrm{i}\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\, v_e^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\, v_i^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k\, v_i}\right)^2}$$

$$|\,\varepsilon(k, \mathrm{i}\omega)\,|^2 = \left[1 + \frac{1}{(k\, L_e)^2} - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \frac{\pi}{2}\, \frac{\omega^2}{k^6} \left[\frac{1}{v_e\, L_e^2} + \frac{1}{v_i\, L_i^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k\, v_i}\right)^2} \right]^2.$$

The resonance now takes place at

$$\omega_0^2 = \omega_{pi}^2\, (k\, L_e)^2 \,/\, [1 + (k\, L_e)^2] \tag{24}$$

The resonant width is

$$\frac{\Delta\,\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, [1 + (kL_e)^2]^{-\frac{3}{2}} \times \left\{ \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\Theta_e}{\Theta_i} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\, \frac{\Theta_e}{\Theta_i}\, \frac{1}{1 + (k\, L_e)^2} \right] \right\},$$

which remains sufficiently small for approximate integration as long as $\Theta_e \gg \Theta_i$ and $k L_i < 1$. The result obtained from integrating across the ion resonance is

$$\frac{\Theta(k)}{2} = \frac{\Theta_e}{2}\,\frac{(k L_e)^2}{1+(k L_e)^2}\cdot\frac{\left\{\sqrt{\dfrac{m_e}{m_i}}+\sqrt{\dfrac{\Theta_e}{\Theta_i}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\Theta_e}{\Theta_i}\,\dfrac{1}{1+(k L_e)^2}\right]\right\}}{\left\{\sqrt{\dfrac{m_e}{m_i}}+\left(\dfrac{\Theta_e}{\Theta_i}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\Theta_e}{\Theta_i}\,\dfrac{1}{1+(k L_e)^2}\right]\right\}}. \tag{25}$$

If $k L_e < 1$, then $\Theta(k) \cong \Theta_e (k L_e)^2$, provided that $m_e/m_i > (\Theta_e/\Theta_i)\exp(-\Theta_e/\Theta_i)$ and $\Theta(k) \cong \Theta_i (k L_e)^2$ for the other direction of the inequality. For $k L_e \sim 1$, $\Theta(k) \cong \frac{1}{2}\Theta_e$ or $\frac{1}{2}\Theta_i$ according to the sign of the same inequality. For $k L_e > 1$ the exponential terms will eventually dominate and $\Theta(k) \cong \Theta_i$. For moderately high electron temperature, the energy/degree of freedom increases monotonically with k from zero to $\frac{1}{2}\Theta_i$. For very high electron temperature there is a maximum in the neighborhood of $k L_e \sim 1$ which is about $\frac{1}{4}\Theta_e$.

Another case of interest is where there is a small number of runaway electrons. For example,

$$f_e^{(0)}(v) = \frac{[1-(\Delta n/n)]}{(2\pi v_0^2)^{\frac{3}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right] + \frac{\Delta n}{n}\,\frac{1}{(2\pi v_1^2)^{\frac{3}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(\mathbf{v}+\mathbf{V}_e)^2}{v_1^2}\right]$$

$$f_i^{(0)}(v) = \delta(\mathbf{v}+\mathbf{V}_i). \tag{26}$$

For simplicity the ions are assumed to have infinite mass. If $n\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e \Delta n$ there will be no current as required for a spatially homogeneous plasma. The requirement for stability is

$$\frac{\Delta n}{n} < \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\left(\frac{V_e}{v_0}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{V_e}{v_0}\right)^2\right]. \tag{27}$$

The validity of the present calculations is restricted to cases where Eq. (27) is satisfied. However we can consider the energy per mode as Δn increases up to the limit given by Eq. (27). Asymptotic forms for U and ε can be employed for various regions of ω, k_z space as indicated in Fig. 3. The z-axis is taken to be in the direction of $\mathbf{V}_e$, and we consider only modes for which $k_x = k_y = 0$.

$$\operatorname{Re} U(k_z, \mathrm{i}\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k_z v_0}\right)^2\right] + \frac{\Delta n}{n}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi v_1^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(\omega-k_z V_e)^2}{(k_z v_1)^2}\right]$$

For $\omega > k_z v_0$ and $k_z < \omega_p/v_0$

$$|\varepsilon(k,\mathrm{i}\omega)|^2 = \left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]^2 + \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\omega}{k_z v_0}\left(\frac{\omega_p}{k_z v_0}\right)^2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k_z v_0}\right)^2\right] + \frac{\omega-k_z V_e}{k_z v_1}\,\frac{\omega_p^2 \Delta n}{n(k_z v_1)^2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-k_z V_e}{k_z v_1}\right)^2\right]\right\}^2.$$

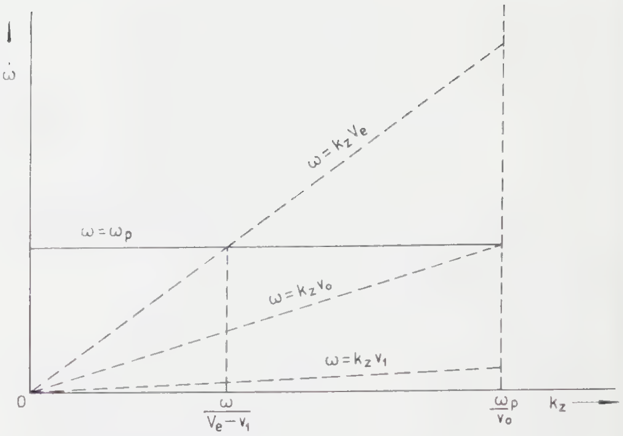

Fig. 3 Asymptotic forms for U and ε in various regions of ω, k_z space.

A resonance takes place at $\omega = \omega_p$ of width

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{\omega_p}{k_z v_0}\right)^3\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{k_z v_0}\right)^2\right] + \frac{(\omega_p-k_z V_e)}{k_z v_1}\,\frac{\omega_p^2 \Delta n}{n(k_z v_1)^2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p-k_z V_e}{k_z v_1}\right)^2\right]\right\}.$$

Provided $k_z < \omega_p/v_0$ and $\Delta n/n \ll (v_1/V_e)^2$, then $\Delta\omega/\omega_p \ll 1$ so that the resonance is sharp. The result obtained from integrating across the resonance is given in Eq. (28), at bottom of page. The latter term of Eq. (28) comes from the region of $k_z > 0$, $\omega < 0$ where the first exponential always dominates. As long as $k_z \gg \omega_p/V_e$ or $k_z \ll \omega_p/V_e$ the first exponential dominates and $\Theta(k_z) \cong \Theta_e$. However when $k_z = \omega_p/(V_e - v_1) \cong \omega_p/V_e$, then

$$\frac{\Theta(k_z)}{2} \cong \frac{\Theta_e}{4} \times\left\{1+\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(V_e/v_0)^2\right]+(v_0\Delta n/v_1 n)}{\exp\left[-\frac{1}{2}(V_e/v_0)^2\right]-(\Delta n/n)(v_0/v_1)^2(v_0/V_e)}\right\}. \tag{29}$$

As long as Eq. (27) is satisfied, this result remains finite. However the energy for modes in the neighborhood of $k_z \cong \omega_p/V_e$ becomes very large and ultimately infinite as

$$\frac{\Delta n}{n} \to \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\left(\frac{V_e}{v_0}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{V_e}{v_0}\right)^2\right].$$

2.4. THEOREMS RELATING TO FLUCTUATIONS

The electric field due to a test charge is defined as follows:

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\,\delta f + \frac{e}{m}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\mathbf{v}} = \mathrm{St}\{f\} \tag{30}$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi e\left[\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1-\mathbf{v}_1 t) + n\int\delta f\,d\mathbf{v}\right].$$

$$\frac{\Theta(k_z)}{2} = \frac{\Theta_e}{4}\left\{\frac{\exp\left(-\dfrac{\omega_p^2}{2k_z^2 v_0^2}\right)+\left(\dfrac{v_0\Delta n}{n v_1}\right)\exp\left[-\dfrac{(\omega_p-k_z V_e)^2}{2(k_z v_1)^2}\right]}{\exp\left(-\dfrac{\omega_p^2}{2k_z^2 v_0^2}\right)+\left(\dfrac{\omega_p-k_z V_e}{k_z v_1}\right)\left(\dfrac{k_z v_0}{\omega_p}\right)\dfrac{\Delta n}{n}\left(\dfrac{v_0}{v_1}\right)^2\exp\left[-\dfrac{(\omega_p-k_z V_e)^2}{2k_z^2 v_1^2}\right]}\right\} + \frac{\Theta_e}{4}. \tag{28}$$

This differs from the thermal equilibrium problem in that St $\{f\}$, the collision term for the field particles does not vanish. However, for a spatially homogeneous plasma it is independent of position, and can be neglected because it only drives the $\mathbf{k}=0$ modes. The calculation is therefore identical to the thermal equilibrium problem formally. The electric field at a point $\mathbf{x}$ due to a fully dressed test particle at $\mathbf{x}_1$ with velocity $\mathbf{v}_1$ is

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, X_1) = -4\pi e \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)} \frac{i\mathbf{k}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}$$

and the superposition theorem is retained i.e.,

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{E}(\mathbf{x}'\, t')\rangle$$
$$= \frac{n}{V}\int \mathbf{E}(\mathbf{x}, X_1)\, \mathbf{E}(\mathbf{x}', X_1')\, W_{11}^{(0)}(X_1 t;\, X_1' t')\, dX_1\, dX_1'$$

leads to Eq. (19) for $\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega)$.

For the same reason the calculation of $r_{\|} = -[4\pi/(\omega\,|\,\varepsilon\,|^2)]\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)$ in Section 1.5 remains formally correct. Therefore the fluctuation-dissipation theorem takes the form

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega) = 2\Theta(\mathbf{k}, \omega)\, r_{\|}(\mathbf{k}, \omega)\, \mathbf{k}\,\mathbf{k}/k^2 \qquad (31)$$

where

$$\Theta(k, \omega) = -\frac{4\pi^2 ne^2}{k^2}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\mathrm{Re}\,U(\mathbf{k}, i\omega)}{\mathrm{Im}\,\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)}\,.$$

Consider for example, the case of electrons and ions at different temperatures:

$$\Theta(\mathbf{k}, \omega) = \Theta_e \times$$
$$\frac{\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k v_e}\right)^2\right] + \left(\frac{\Theta_e}{\Theta_i}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k v_i}\right)^2\right]}{\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k v_e}\right)^2\right] + \left(\frac{\Theta_e}{\Theta_i}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k v_i}\right)^2\right]}\,. \qquad (32)$$

If $\Theta_e = \Theta_i$ it is clear that $\Theta(\mathbf{k}, \omega) = \Theta_e = \Theta_i$. Many limiting cases are possible for $\Theta_e \neq \Theta_i$. For example, if $\Theta_e > \Theta_i$, then $\Theta(k, \omega) \simeq \Theta_i$ for $\omega < kv_i$ and $\Theta(k, \omega) \simeq \Theta_e$ for $\omega > kv_e$. It is clear that for non-equilibrium states the fluctuation-dissipation relation is not very useful.

The previous calculation of the absorption coefficient in Section 1.6 also remains formally correct, i.e.,

$$\mathfrak{a}(\mathbf{k}, \omega) = -2\omega\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega).$$

According to Kirchhoff's law we should expect that the emission per unit volume from the plasma would be

$$\mathfrak{e}(\mathbf{k}, \omega) = \mathfrak{a}(\mathbf{k}, \omega)\, W(\mathbf{k}, \omega)$$
$$= -\frac{4\pi ne^2}{k^2}\,\frac{2\pi\omega}{k}\,\frac{\mathrm{Re}\,U(\mathbf{k}, i\omega)\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)}{|\,\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)\,|^2}\,. \qquad (33)$$

The force on a test particle is $-eE(\mathbf{x}_1, X_1)$ so that the spontaneous emission from $nf^{(0)}(\mathbf{v}_1)$ test particles per unit volume is

$$4\pi ne^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v}'\, f(\mathbf{v}')\, \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'}{k^2}\, \frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)}{|\,\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)\,|^2}\,.$$

Since $\mathrm{Re}\,U(\mathbf{k}, i\omega) = \int f(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}'\, \delta(\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'/k)$, this reduces to

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \mathfrak{e}(\mathbf{k}, \omega)$$

where $\mathfrak{e}(\mathbf{k}, \omega)$ is given by Eq. (33). In a situation where instability is approached, $\mathrm{Re}\,\varepsilon \to 0$, $\mathrm{Im}\,\varepsilon \to 0$ so that $\mathfrak{e}(\mathbf{k}, \omega) \to \infty$. However, the emission

$$\mathfrak{e}(\mathbf{k}) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \mathfrak{e}(\mathbf{k}, \omega)$$

remains finite. For example if $f_j^{(0)}(v)$ is given by Eqs. (26), the result from integrating across the resonance at $\omega = \omega_p$ is

$$\mathfrak{e}(0, 0, k_z) = \Theta_e \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\omega_p^4}{(k_z v_0)^3} \left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{k_z v_0}\right)^2\right] + \frac{\Delta n}{n}\,\frac{v_0}{v_1}\left[1 + \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2\left(1 - \frac{k_z V_e}{\omega_p}\right)\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p - k_z V_e}{k_z v_1}\right)^2\right]\right\} \qquad (34)$$

which remains finite when $k_z \simeq \omega_p/V_e$ and

$$\frac{\Delta n}{n} \to \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 \frac{V_e}{v_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{V_e}{v_0}\right)^2\right].$$

2.5. FOKKER-PLANCK EQUATIONS

The fact that $\mathrm{Im}\,H_k = 0$ is sufficient to determine $\mathrm{Im}\,h_k(\mathbf{v}_1)$ in Eq. (17) and the collision operator

$$\mathrm{St}\,\{f\} = -\frac{e^2}{m}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{4\pi\mathbf{k}}{k^2}\,\mathrm{Im}\,h_k(\mathbf{v}), \qquad (35)$$

is therefore determined as shown by LENARD [3]. It is however instructive to obtain this result by the present methods.

The number of particles in (X', dX') at time t is

$$f(X', t') = \sum_n \delta[\mathbf{x}' - \mathbf{x}_n'(t')]\,\delta[\mathbf{v}' - \mathbf{v}_n'(t')] \qquad (36)$$

where $\mathbf{x}_n'(t')$, $\mathbf{v}_n'(t')$ describe the orbit of the n^{th} particle. $f(X', t')$ satisfies the equation

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'} - \frac{e}{m}\,\mathbf{E}(\mathbf{x}', t')\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right\} f(X', t') = 0 \qquad (37)$$

with

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}', t') = e\sum_{l\neq n} \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\,\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_l'|}\,.$$

Eq. (37) can be integrated along the unperturbed linear orbits and the result can then be substituted back into Eq. (37) to obtain

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v}'\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right\} f(X', t')$$
$$= \frac{e}{m}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}\cdot\{\mathbf{E}(\mathbf{x}', t')\, f[\mathbf{x}' - \mathbf{v}'(t' - t'), \mathbf{v}';\, t]\}$$
$$+ \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}', t') \int_{t''=t}^{t'} dt''\, \mathbf{E}[\mathbf{x}' + \mathbf{v}'(t'' - t');\, t'']$$
$$\times \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}\, f[\mathbf{x}' + \mathbf{v}'(t'' - t'), \mathbf{v}';\, t''] \qquad (38)$$

The next step is to take the ensemble average of each term in the equation. Thus

$$\langle f(\mathbf{x}',\mathbf{v}';t')\rangle$$

$$\int\sum_n \delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_n{}')\,\delta(\mathbf{v}'-\mathbf{v}_n{}')\,D(Xt;X''t'';X't')\,dX\,dX''\,dX'$$

$$= n f_1(X',t')$$

where f_1 is the usual one-body function.

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}',t')\,f[\mathbf{x}'-\mathbf{v}'(t'-t),\mathbf{v}';t]\rangle$$

$$=\int e\sum_{l\neq n}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_l{}'|}\,\delta[\mathbf{x}'-\mathbf{v}'(t'-t)-\mathbf{x}_n]$$

$$\times\,\delta(\mathbf{v}'-\mathbf{v}_n)\,D(Xt;X''t'';X't')\,dX\,dX''\,dX'$$

$$=n^2 e\int\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2{}'|}\,\delta[\mathbf{x}'-\mathbf{v}'(t'-t)-\mathbf{x}_1]$$

$$\times\,\delta(\mathbf{v}'-\mathbf{v}_1)\,W_{12}(X_1t;X_2{}'t')\,dX_1\,dX_2{}'$$

Making use of Eq. (13) we finally get the result

$$n^2 e f_1^{(0)}(\mathbf{v}')\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{dp}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{e}^{p(t'-t)}4\pi\mathrm{i}\mathbf{k}}{k^2\varepsilon(\mathbf{k},p-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')}$$

$$\times\left\{\int\frac{d\mathbf{v}'\,P_k(\mathbf{v},\mathbf{v}')}{p+\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{v}'-\mathbf{v})}+\frac{1}{np}(1-\varepsilon)\right\}.$$

As usual, it is assumed that this expression goes to its asymptotic form, determined by the pole at $p=0$, in a time sufficiently short compared to observable times, that the asymptotic form is always a good approximation. Thus

$$\langle\mathbf{E}(\mathbf{x}'t')f[\mathbf{x}'-\mathbf{v}'(t'-t),\mathbf{v}';t]\rangle$$

$$\cong nef_1^{(0)}(\mathbf{v}')\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{4\pi\mathbf{k}}{k^2}\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon(\mathbf{k};-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')}{|\varepsilon|^2}$$

$$= n\mathbf{E}(\mathbf{x}',X')\,f_1^{(0)}(\mathbf{v}').$$

In the second term on the right hand side of Eq. (38), it is necessary to make use of Eqs. (15), the probability distributions for two singled-out particles. The result is

$$\langle\mathbf{E}(\mathbf{x}'t')\,\mathbf{E}[\mathbf{x}'+\mathbf{v}'(t''-t');t'']\,f[x'+\mathbf{v}'(t''-t'),\mathbf{v}';t'']\rangle$$

$$= n\mathbf{C}^+[v'(t'-t''),\ t'-t'']\,f_1^{(0)}(\mathbf{v}')$$

where

$$\mathbf{C}^+(\mathbf{r},\tau)=\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{dp}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{p\tau+\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\mathbf{S}^+(\mathbf{k},p)$$

and $\mathbf{S}^+(\mathbf{k},p)$ is given by Eq. (16). The form of the Fokker-Planck equation is therefore

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t'}+\mathbf{v}'\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right\}f(\mathbf{x}'t')=\mathsf{St}\{f\}$$

where

$$\mathsf{St}\{f\} = \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}',X')\,f_1^{(0)}(\mathbf{v}')$$

$$+\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}\cdot\int_0^{t'-t}d\tau\,\mathbf{C}^+(\mathbf{v}'\tau,\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}f^{(0)}(\mathbf{v}')\qquad(39)$$

$$\mathbf{C}^+(\mathbf{r},\tau)=\mathbf{C}(\mathbf{r},\tau)\qquad(\tau>0)$$

$$=0\qquad(\tau<0)$$

so that $\mathbf{C}^+$ can be replaced by $\mathbf{C}$ in the integration. $\mathbf{C}$ is a symmetric dyadic in the present case so that $\mathbf{C}(\mathbf{r},\tau)=\mathbf{C}(-\mathbf{r},-\tau)$. If most of the integral comes from values of τ less than any observable time, we can use the asymptotic value; i.e.,

$$\int_0^{t'-t}d\tau\,\mathbf{C}^+(\mathbf{v}'\tau,\tau)\cong\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{C}(\mathbf{v}'\tau,\tau)\,d\tau$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\mathbf{S}(\mathbf{k},-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}').$$

Now, substituting from Eq. (19), the final result is

$$\mathsf{St}\{f\}=\frac{4\pi e^2}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}\cdot\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left\{\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon}{|\varepsilon(\mathbf{k},-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')|^2}\frac{\mathbf{k}}{k^2}f_1^{(0)}(\mathbf{v}')\right.$$

$$\left.+\frac{\pi\omega_p{}^2}{k^3}\frac{\mathrm{Re}\,U}{|\varepsilon|^2}\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}\cdot\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial\mathbf{v}'}\right\}.\qquad(40)$$

Although this is in a different form, the result is identical to that of Lenard. The purpose of the present calculation has been simply to express the Fokker-Planck coefficients in terms of the electric field fluctuations.

There is another problem in which at $t=0$ all particles but one have the distribution function $f^{(0)}(\mathbf{v})$ which is spatially homogeneous. One particle is singled out and initially has the arbitrary distribution function $\Omega(X)$. The lowest order one-body function for the singled-out particle is

$$W^{(0)}(X,t)=\int\Omega(X_0)\,\delta[X-X_0(t)]\,dX_0\qquad(41)$$

where $\delta[X-X_0(t)]=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0-\mathbf{v}_0t)\,\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)$. The first order equation for W is

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right\}W(Xt)=\mathsf{St}\{W\}$$

The determination of $\mathsf{St}\{W\}$ has previously been accomplished in the case where the field particle distribution is Maxwellian [2]. The equations previously employed are applicable with some alterations that will be cited. The collision operator takes the form

$$\mathsf{St}\{W\} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\left\{\mathbf{F}W^{(0)}+\mathbf{T}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}W^{(0)}\right\}\qquad(42)$$

with

$$\mathbf{F}=-ne\int\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,\delta f(X,X';t)\,dX'$$

$$\mathbf{T}=-ne\int\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,\mathbf{G}(X,X';t)\,dX'.$$

δf is determined by the equations

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{v}'\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right\}\delta f(X,X';t)$$

$$=-\frac{e}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\mathbf{v}'}\cdot\frac{\partial\Phi(X,\mathbf{x}',t,)}{\partial\mathbf{x}'}+\mathsf{St}\{f^{(0)}(\mathbf{v}')\}\qquad(43)$$

$$\nabla'^2\Phi(X,\mathbf{x}',t) - 4\pi e\,\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) + 4\pi ne\int\delta f(X,X',t)\,d\mathbf{v}'.$$

In this case the only additional term is $\mathsf{St}\{f^{(0)}(\mathbf{v}')\}$ given by Eq. (40). Since it only drives the $\mathbf{k}=0$ modes, it can be omitted and the result is formally the same as before.

$\mathbf{G}$ is determined by the equations:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} + \mathbf{v}'\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right\}\mathbf{G}(X, X'; t)$$

$$-\frac{e}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}'}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\mathbf{A}(X, x'; t) - \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\psi(x, X'), \tag{44}$$

$$\nabla'^2\mathbf{A}(X, \mathbf{x}'; t) = 4\pi n e\int \mathbf{G}(X, X'; t)\, d\mathbf{v}',$$

and

$$\psi(x, X') = -4\pi e\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{k_2}\,[f^{(0)}(\mathbf{v}') + h_k(\mathbf{v}')]$$

where $h_k(\mathbf{v}')$ is given by Eq. (17). It is a straightforward matter to solve these equations and show that

$$\mathsf{St}\{W_i\} = \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\Big\{\mathbf{E}(\mathbf{x}, X)\,W^{(0)}(X t)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{e}{m}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\mathbf{S}(\mathbf{k}, -i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}W^{(0)}(X t)\Big\}. \tag{45}$$

The coefficients are the same as before. This is a Fokker-Planck equation of the classic type where the coefficients do not contain the dependent variable. $f^{(0)}(\mathbf{v})$ is required to be spatially homogeneous, but $W^{(0)}(Xt)$ is not.

2.6 FLUCTUATIONS WITH A CONSTANT MAGNETIC FIELD

The calculations follow the same pattern as in the case of zero magnetic field. The details of the calculations will be omitted here. The velocity coordinates $(v_\perp, \beta, v_z)$ will be employed where the magnetic field is taken to be in the z-direction. The spatially homogeneous one-body function $f^{(0)}(v_\perp, v_z)$ is independent of β.

The joint probability functions are as follows:

$$W_{11}^{(0)}(Xt; X't')$$

$$= V f^{(0)}(\mathbf{v})\,\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{x}(\tau)]\,\frac{\delta(v_\perp' - v_\perp)}{v_\perp'}\,\delta(v_z' - v_z)\,\delta(\beta' - \beta - \omega_c\tau) \tag{46}$$

where $\tau = t' - t$ and

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x} + a[\cos(\beta + \omega_c\tau) - \cos\beta]\,\mathbf{e}_x$$
$$+ a[\sin(\beta + \omega_c\tau) - \sin\beta]\,\mathbf{e}_y + v_z\tau\,\mathbf{e}_z$$

$$W_{12}(Xt; X't') = f^{(0)}(\mathbf{v})\,f^{(0)}(\mathbf{v}')$$

$$+\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{dp}{2\pi i}\,e^{p\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,W_{pk}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \tag{47}$$

where $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, $\mathbf{k} = (k_\perp, \alpha, k_z)$,

$$W_{pk}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = (1/n)\exp[-i k_\perp a'\cos(\beta' - \alpha)]$$

$$\sum_{n'}\frac{J_{n'}(k_\perp a')}{p + i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}']_{n'}}\, i^{n'} e^{in'(\beta'-\alpha)}$$

$$\times\Big\{n P_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + i\frac{\omega_p^2}{\mathbf{k}^2}\frac{[\mathbf{k}\cdot\partial f/\partial\mathbf{v}']_{n'}}{\varepsilon(\mathbf{k}, p)}$$

$$\times\Big[f^{(0)}(\mathbf{v}_1)\,e^{-ik_\perp a\cos(\beta-\alpha)}\sum_n\frac{J_n(k_\perp a)\,i^n e^{in(\beta-\alpha)}}{p + i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n}$$

$$+\int d\mathbf{v}''\, n P_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}'')\, e^{-ik_\perp a''\cos(\beta''-\alpha)}$$

$$\sum_{n''}\frac{J_n(k_\perp a'')\, i^{n''} e^{in''(\beta''-\alpha)}}{p + i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'']_{n''}}\Big]\Big\},$$

$$[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n = k_z v_z + n\omega_c$$

$$\left[\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}}\right]_n = k_z\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z} + \frac{n}{a}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_\perp}$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2}\int d\mathbf{v}\sum_n\frac{J_n^2(k_\perp a)\, i[\mathbf{k}\cdot\partial f/\partial\mathbf{v}]_n}{p + i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n}.$$

Quantities analogous to $h_k(\mathbf{v}_1)$ and $H_k(u)$ in Section 2.3 are introduced as follows:

$$h_k(\mathbf{v}) = \int n P_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}')\, d\mathbf{v}'$$

$$= e^{-ik_\perp a\cos(\beta-\alpha)}\sum_n h_n(v_\perp, v_z)\,J_n(k_\perp a)\, i^n e^{in(\beta-\alpha)}$$

$$H(u) = \sum_n\int h_n(v_\perp, v_z)\,J_n^2(k_\perp a)\,\delta(u - [\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n/k)\, d\mathbf{v}.$$

The results for the electric field fluctuations are then formally the same as the zero magnetic field case including the theorems discussed in Section 2.4. For example,

$$\mathsf{S}^+(\mathbf{k}, i\omega)$$

$$= (4\pi)^2 n e^2\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^4}\frac{\pi i}{k}\left\{\frac{1 - \varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)}{\varepsilon\,\mathrm{Im}\,\varepsilon}\,\mathrm{Re}\,U - \frac{H(-\omega/k)}{\mathrm{Im}\,\varepsilon}\right\} \tag{48}$$

where the present definitions of ε and H apply and

$$U(\mathbf{k}, p) = \frac{k}{\pi}\int d\mathbf{v}\, f^{(0)}(\mathbf{v})\sum_n\frac{J_n^2(k_\perp a)}{p + i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n}.$$

It has been established, that $\mathrm{Im}\, H(u) = 0$ in the presence of a magnetic field, ROSTOKER [4]. Therefore

$$\mathsf{S}(\mathrm{k}, \omega) = (4\pi)^2 n e^2\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^4}\frac{2\pi}{k}\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{U}(\mathbf{k}, i\omega)}{|\varepsilon(\mathbf{k}, i\omega)|^2} \tag{49}$$

and

$$\mathsf{S}^+(\mathbf{k}, i\omega) = \frac{\mathsf{S}(\mathbf{k}, \omega)}{2} + \frac{i}{2\pi}\,\mathsf{P}\int_{\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega' - \omega}\,\mathsf{S}(\mathbf{k}, \omega'). \tag{50}$$

It should be noted that Eqs. (48), (49) and (50) imply an explicit expression for $\mathrm{Re}\, H(u)$

$$\frac{\mathrm{Re}\, H(u)}{\mathrm{Im}\,\varepsilon} = \left[1 - \frac{\mathrm{Re}\,\varepsilon(\mathbf{k}, -iku)}{|\varepsilon|^2}\right]\frac{\mathrm{Re}\, U}{\mathrm{Im}\,\varepsilon}$$

$$\cdot\frac{1}{\pi}\,\mathsf{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du'}{u' - u}\,\frac{\mathrm{Re}\, U(\mathbf{k}, -iku')}{|\varepsilon(\mathbf{k}, -iku')|^2}. \tag{51}$$

By means of the procedure employed in Section 2.5, the Fokker-Planck equation for a spatially homogeneous plasma with a constant magnetic field is obtained. The result is

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{mc}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} f(Xt) = \mathsf{St}\{f\} \tag{52}$$

$$\mathsf{St}\{f\} = \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\mathbf{E}(\mathbf{x}, X)\, f^{(0)}(\mathbf{v})$$

$$+\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\int_0^\infty d\tau\,\mathbf{C}(\mathbf{r}(\tau); \tau)\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\, f^{(0)}(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, X) = 4\pi e\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{i\mathbf{k}}{k^2}\, e^{-ik_\perp a\cos(\beta-\alpha)}$$

$$\sum_n\frac{J_n(k_\perp a)\, i^n e^{in(\beta-\alpha)}}{\varepsilon(\mathbf{k}, -i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)} \tag{53}$$

and $\mathbf{r}(\tau)=\mathbf{x}(\tau)-\mathbf{x}$ where $\mathbf{x}(\tau)$ is given in Eq. (47). It should be noted that $\mathsf{C}(\mathbf{r}(\tau);\tau)\neq\mathsf{C}(\mathbf{r}(-\tau);-\tau)$ so that the limits of the τ-integration in Eq. (52) may not be changed from $(0,\infty)$ to $(-\infty,\infty)$. Instead we have

$$\int_0^\infty d\tau\,\mathsf{C}(\mathbf{r}(\tau);\tau) = \int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\sum_{n,n'}J_n(k_\perp a)J_{n'}(k_\perp a)\,\mathrm{i}^{n-n'}\,e^{\mathrm{i}(n-n')(\beta-\alpha)} \times \mathsf{S}^+(\mathbf{k},-i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)\,. \tag{54}$$

where $\mathsf{S}^+(\mathbf{k},\mathrm{i}\omega)$ is given by Eq. (48) or Eqs. (49) and (50). The only dependence on α is through the operators

$$\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} = -\frac{k_\perp}{v_\perp}\cos(\beta-\alpha)\frac{\partial}{\partial\beta} - k_\perp\sin(\beta-\alpha)\frac{\partial}{\partial v_\perp} + k_z\frac{\partial}{\partial v_z}\,, \tag{55}$$

so that the α-integrations can easily be carried out. This accomplishes the following reduction of the Fokker-Planck equation

$$\mathsf{St}\{f\} = -\frac{4\pi e^2}{m}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{Im}}{k^2}\sum_n\left[\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right]_n J_n^2(k_\perp a) \times\left\{\frac{f^{(0)}}{\varepsilon(k,-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)} - \frac{\pi\,\mathrm{i}\,\omega_p^2}{k^3}\left[\frac{\mathrm{Re}\,U(k,-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)}{|\varepsilon(k,-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2} + \frac{\mathrm{i}}{\pi}\mathsf{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'+[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n}\frac{\mathrm{Re}\,U(\mathbf{k},\mathrm{i}\,\omega')}{|\varepsilon(\mathbf{k},\mathrm{i}\,\omega')|^2}\right]\left[\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right]_n f^{(0)}\right\} \tag{56}$$

where

$$\left[\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right]_n = k_z\frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{n}{a}\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \mathrm{i}\frac{k_\perp}{v_\perp}\frac{J_n'(k_\perp a)}{J_n(k_\perp a)}\frac{\partial}{\partial\beta}\,.$$

Since $\partial f^{(0)}/\partial\beta=0$ for a spatially homogeneous plasma, the result is simply

$$\mathsf{St}\{f\} = -\frac{4\pi e^2}{m}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}\sum_n\left[\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right]_n J_n^2(k_\perp a)\,\mathrm{Im}\,h_n(v_\perp,v_z)$$

where

$$-\mathrm{Im}\,h_n(v_\perp,v_z) = \frac{1}{|\varepsilon(k,-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2}\left\{f^{(0)}(\mathbf{v})\,\mathrm{Im}\,\varepsilon + \frac{\pi\,\omega_p^2}{k^3}\mathrm{Re}\,U\left[\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\mathbf{v}}\right]_n\right\}. \tag{57}$$

This result has been obtained previously [4]. We note that the terms involving the Hilbert transform of the spectral density have all dropped out, not because of symmetry of $\mathsf{C}[\mathbf{r}(\tau),\tau]$, but because $f^{(0)}(\mathbf{v})$ is independent of β. In the case of a test-particle problem the Fokker-Planck equation takes the form

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} - \frac{e}{mc}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right\}w(Xt) = \mathsf{St}\{w\}$$

where

$$\mathsf{St}\{w\} = \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{E}(\mathbf{x},X)w^{(0)}(X,t) + \left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\int_0^\infty d\tau\,\mathsf{C}(\mathbf{r}(\tau),\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}w^{(0)}(Xt) \tag{58}$$

and $\mathbf{E}(\mathbf{x},X)$, $\mathsf{C}[\mathbf{r}(\tau),\tau]$ are the same as in Eq. (52). In this case however $w^{(0)}(X,t)$, the lowest order one-body function for the singled-out particle is arbitrary so that $\partial w^{(0)}/\partial\beta\neq0$.

The collision operator can be expressed as

$$\mathsf{St}\{w\} = \frac{1}{m}\left\{\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial v_\perp}v_\perp F_\beta w^{(0)} + \frac{\partial}{\partial v_z}F_z w^{(0)} - \frac{1}{v_\perp}F_\varrho\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\beta} + \frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial v_\perp}v_\perp T_{\beta\beta}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial v_\perp} + \frac{\partial}{\partial v_z}T_{zz}\frac{\partial}{\partial v_z}w^{(0)} + \frac{T_{\varrho\varrho}}{v_\perp^2}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\beta^2} + \frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial v_\perp}v_\perp T_{\beta z}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial v_z} + \frac{\partial}{\partial v_z}T_{\beta z}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial v_\perp} + \frac{1}{v_\perp}\left(\frac{\partial T_{\varrho\beta}}{\partial v_\perp} - \frac{\partial T_{z\varrho}}{\partial v_z}\right)\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\beta}\right\}.$$

The coefficients in this collision operator are obtained from Eq. (56).

$$F_z = 4\pi e^2\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{k_z}{k^2}\sum_n\frac{J_n^2(k_\perp a)\,\mathrm{Im}\,\varepsilon}{|\varepsilon(k,-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2}$$

$$F_\beta = 4\pi e^2\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}\sum_n\frac{n}{a}\frac{J_n^2(k_\perp a)\,\mathrm{Im}\,\varepsilon}{|\varepsilon(k,-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2}$$

$$T_{zz} = (2\pi e\omega_p)^2\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{k_z^2}{k^5}\sum_n\frac{J_n^2(k_\perp a)\,\mathrm{Re}\,U(\mathbf{k},-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)}{|\varepsilon(\mathbf{k},-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2}$$

$$T_{\beta\beta} = (2\pi e\omega_p)^2\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^5}\sum_n\left(\frac{n}{a}\right)^2\frac{J_n^2(k_\perp a)\,\mathrm{Re}\,U}{|\varepsilon(\mathbf{k},-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2}$$

$$T_{\beta z} = (2\pi e\omega_p)^2\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{k_z}{k^5}\sum_n\left(\frac{n}{a}\right)\frac{J_n^2(k_\perp a)\,\mathrm{Re}\,U}{|\varepsilon(\mathbf{k},-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2}\,.$$

These coefficients are the same as in the spatially homogeneous case. The additional coefficients are

$$F_\varrho = 4\pi e^2\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{k_\perp}{k^2}\sum_n\frac{J_n(k_\perp a)J_n'(k_\perp a)\,\mathrm{Re}\,\varepsilon}{|\varepsilon(k,-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2}$$

$$T_{\varrho\varrho} = (2\pi e\omega_p)^2\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{k_\perp^2}{k^5}\sum_n\frac{[J_n'(k_\perp a)]^2\,\mathrm{Re}\,U}{|\varepsilon(\mathbf{k},-\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n)|^2}$$

$$T_{\varrho\beta} = -\frac{(2\pi e\omega_p)^2}{\pi}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{k_\perp}{k^5}\sum_n\frac{n}{a}J_n(k_\perp a)J_n'(k_\perp a) \times\mathsf{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega+[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n}\frac{\mathrm{Re}\,U(\mathbf{k},\mathrm{i}\,\omega)}{|\varepsilon(\mathbf{k},\mathrm{i}\,\omega)|^2}$$

$$T_{z\varrho} = \frac{(2\pi e\omega_p)^2}{\pi}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{k_\perp k_z}{k^5}\sum_n J_n(k_\perp a)J_n'(k_\perp a) \times\mathsf{P}\int_{\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega+[\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}]_n}\frac{\mathrm{Re}\,U(\mathbf{k},\mathrm{i}\,\omega)}{|\varepsilon(\mathbf{k},\mathrm{i}\,\omega)|^2}\,.$$

2.7 DIFFUSION IN THE PRESENCE OF A CONSTANT MAGNETIC FIELD

Consider the test-particle problem where the lowest order one-body function is

$$w^{(0)}(X'\,t')$$

$$\delta\,[\mathbf{x}'-\mathbf{x}(\tau)]\,\frac{\delta\,(v_\perp{}'-v_\perp)}{v_\perp{}'}\,\delta\,(v_z{}'-v_z)\,\delta\,(\beta'-\beta-\omega_c\,\tau)$$

and $\mathbf{x}(\tau)$ is given in Eq. (43). This function simply describes the motion of the test particle on its unperturbed orbit. We shall be interested in the quantity

$$\langle \mathbf{r}_\perp{}^2\rangle=\int w\,(X'\,t')\,d\,X'\,r_\perp{}^2$$

where

$$\mathbf{r}_\perp{}^2=[x'-x(\tau)]^2+[y'-y(\tau)]^2.$$

If $w\,(X'\,t')=w^{(0)}\,(X'\,t')$, it is clear that $\langle r_\perp{}^2\rangle=0$. The collision operator, however, has the effect of spreading out the distribution function so that if $w\,(X'\,t)=w^{(0)}+w^{(1)}$, then $\langle \mathbf{r}_\perp{}^2\rangle\neq 0$. To calculate $w^{(1)}$, we integrate Eq. (58) along the unperturbed orbits:

$$w^{(1)}(X'\,t')\quad\int_{t'=t}^{t'} d\,t''\,\mathsf{St}\,\{w^{(0)}\,(t'')\}$$

where

$$\begin{aligned}
w^{(0)}\,(t'')=\delta\,\{&x'+a'\,(\cos\,[\beta'+\omega_c\,(t''-t')]-\cos\beta')-\\
&-x-a\,(\cos\,[\beta+\omega_c\,(t''-t)]-\cos\beta)\}\\
\delta\,\{&y'+a'\,(\sin\,[\beta'+\omega_c\,(t''-t')]-\sin\beta')-y\\
&-a\,(\sin\,[\beta'+\omega_c\,(t''-t)]-\sin\beta)\}\\
\cdot\,\delta\,[&z'+v_z{}'\,(t''-t')-z-v_z\,(t''-t)]\\
\times\,&\frac{\delta\,(v_\perp{}'-v_\perp)}{v_\perp{}'}\,\delta\,(v_z{}'-v_z)\,\delta\,[\beta'-\beta-\omega_c\,(t'-t)]\,.
\end{aligned}\tag{60}$$

Eq. (59) is employed for $\mathsf{St}\,\{w^{(0)}\}$. To calculate $\langle\varrho_\perp{}^2\rangle$ we first carry out the coordinate integration, then the velocity integration and finally the time integration. It will be apparent that only two terms in $\mathsf{St}\,\{w^{(0)}\}$ produce anything so that the others will be omitted.

$$\begin{aligned}
\langle r_\perp{}^2\rangle=&\int_t^{t'}d\,t''\int_0^{2\pi}d\,\beta'\int_0^{\infty}v_\perp{}'\,d\,v_\perp{}'\\
&\times\Big[\{a'\,(\cos\,[\beta'+\omega_c\,(t''-t')]-\cos\beta')\\
&-a\,(\cos\,[\beta+\omega_c\,(t''-t)]-\cos\,[\beta+\omega_c\,(t'-t)])\}^2\\
&+\{a'\,(\sin\,[\beta'+\omega_c\,(t''-t)]-\sin\beta')\\
&-a\,(\sin\,[\beta+\omega_c\,(t''-t)]-\sin\,[\beta+\omega_c\,(t'-t)])\}^2\Big]\\
&\times\frac{1}{m}\left\{\frac{T_{\varrho\varrho}}{v'_\perp{}^2}\,\frac{\partial}{\partial\beta'^2}+\frac{1}{v'_\perp}\,\frac{\partial}{\partial v'_\perp}\,v'_\perp\,T_{\beta\beta}\,\frac{\partial}{\partial v'_\perp}\right\}\\
&\frac{\delta\,(v'_\perp-v_\perp)}{v'_\perp}\,\delta\,[\beta'-\beta-\omega_c\,(t'-t)]\,.
\end{aligned}$$

Now integrate by parts twice. It is apparent that the only contributions obtain when $r_\perp{}^2$ is differentiated twice. The result is therefore

$$\begin{aligned}
\langle r_\perp{}^2\rangle&=\int_{t''=t}^{t'}d\,t''\,\frac{4\,a^2}{m\,v_\perp{}^2}\,(T_{\varrho\varrho}+T_{\beta\beta})\,[1-\cos\,\omega_c\,(t''-t')]\\
&\cong\frac{4}{m\,\omega_c{}^2}\,\{T_{\varrho\varrho}+T_{\beta\beta}\}\,(t'-t)
\end{aligned}\tag{61}$$

for $t'-t\gg 1/\omega_c$. In terms of the electric field fluctuations

$$\mathbf{T}=\frac{e^2}{m}\int_0^{\infty}d\,\tau\,\mathbf{C}\,(\mathbf{r}\,(\tau);\tau)\,d\,\tau\,.$$

where

$$\mathbf{C}\,(\mathbf{r}\,(\tau),\tau)=\langle\mathbf{E}\,(\mathbf{x}\,t)\,\mathbf{E}\,(\mathbf{x}+\mathbf{r}\,(\tau),t+\tau)\rangle\,.$$

Therefore $\langle r_\perp{}^2\rangle=D\,(t'-t)$, where the diffusion coefficient is

$$D=\frac{4\,c^2}{B^2}\int_0^{\infty}d\,\tau\,\langle\mathbf{E}_\perp\,(\mathbf{x}\,t)\cdot\mathbf{E}_\perp\,(\mathbf{x}+\mathbf{r}\,(\tau),t+\tau)\rangle\tag{62}$$

and

$$\mathbf{E}_\perp=\mathbf{E}-\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}}{B^2}\,\mathbf{B}\,.$$

An elementary derivation of a formula similar to Eq. (62) has previously been given by SPITZER [5]. Eq. (62) is, in fact, the same as Spitzer's formula for a zero-velocity test charge; i.e., $\mathbf{r}\,(\tau)=0$.

Spitzer has discussed the effect of an instability of the collective modes of oscillation on the diffusion coefficient D. It is a qualitative discussion because his formula is not explicit and because non-linear effects are considered. The present calculations do not include non-linear effects since they are restricted to stable distribution functions. However we may consider a distribution function that approaches instability when some parameter is varied such as that given by Eq. (26). Only a zero velocity test charge will be considered so that

$$\begin{aligned}
D=\frac{4\,n\,e^2\,c^2}{B^2}\int\frac{d\,\mathbf{k}}{(2\,\pi)^3}\,\frac{k_\perp{}^2}{k^5}\,&\left\{\frac{\mathrm{Re}\,U\,(\mathbf{k},-\mathrm{i}\,\omega_c)}{|\,\varepsilon\,(\mathbf{k},-\mathrm{i}\,\omega_c)\,|^2}\right.\\
&\left.+\frac{\mathrm{Re}\,U\,(\mathbf{k},\mathrm{i}\,\omega_c)}{|\,\varepsilon\,(\mathbf{k},\mathrm{i}\,\omega_c)\,|^2}\right\}
\end{aligned}\tag{63}$$

where

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,U\,(\mathbf{k},\pm\,\mathrm{i}\omega_c)=\frac{k}{2\,\pi}\int_{\infty}^{\infty}d\,\tau\,\Big\{&\exp\Big[\mp\,\mathrm{i}\omega_c\,\tau-\frac{(k_z\,v_0\,\tau)^2}{2}\\
&-(k_\perp\,a_0)^2\,(1-\cos\omega_c\,\tau)\Big]\\
&+\frac{\varDelta\,n}{n}\exp\Big[\mp\,\mathrm{i}\omega_c\tau+\mathrm{i}\,k_z V_e\tau-\frac{(k_z\,v_1\,\tau)^2}{2}\\
&-(k_\perp\,a_1)^2\,(1-\cos\omega_c\,\tau)\Big]
\end{aligned}\tag{64}$$

$$a_0=v_0/\omega_c\,,\quad a_1=v_1/\omega_c\,;$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\,(\mathbf{k},\pm\,\mathrm{i}\omega_c)=1-\frac{1}{(k\,L_0)^2}\Big\{&\int_0^{\infty}d\,\tau\,\exp\,[\mp\,\mathrm{i}\,\omega_c\,\tau]\\
&\frac{\partial}{\partial\tau}\exp\Big[-\frac{(k_z\,v_0\,\tau)^2}{2}-(k_\perp\,a_0)^2\,(1-\cos\omega_c\tau)\Big]\\
&+\frac{\varDelta\,n}{n}\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2\int_0^{\infty}d\tau\exp\,[\mp\,\mathrm{i}\omega_c\tau+\mathrm{i}\,k_z V_e\tau]\\
&\frac{\partial}{\partial\tau}\exp\Big[-\frac{(k_z\,v_1\,\tau)^2}{2}-(k_\perp\,a_1)^2\,(1-\cos\omega_c\tau)\Big]\Big\}
\end{aligned}\tag{65}$$

where $1/L_0{}^2=\omega_p{}^2/v_0{}^2$.

We assume that $\omega_p > \omega_c$ and $(\Delta n/n)\,(v_0/v_1)^2 \ll 1$. Δn is the parameter to be varied to ultimately produce instability. Eq. (63) can be evaluated by considering various regions of $\mathbf{k}$-space in which U and ε have simple asymptotic forms. For example if $k > 1/L_0$, $\varepsilon \cong 1$, $\operatorname{Re} U \cong 1/\sqrt{2\pi v_0^2}$ and

$$D_0 \cong \frac{4\sqrt{2}}{3\,\pi^{5/2}}\,\frac{a_0^2 e^2}{L_0^2}\,\frac{\ln(k_{\max} L_0)}{m v_0}, \tag{66}$$

where $k_{\max}$ is the usual cut-off at the inverse of the closest distance of approach. This is the usual classical result. Now consider the contribution from the region $ka_0 < 1$ where

$$\operatorname{Re} U(k, \pm \mathrm{i}\omega_c) \cong \frac{k}{|k_z|}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi v_0^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_c}{k_z v_0}\right)^2\right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi v_1^2}}\,\frac{\Delta n}{n}\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(\pm\omega_c - k_z V_e)^2}{(k_z v_1)^2}\right]\right\}$$

$$|\varepsilon(k, \pm\mathrm{i}\omega_c)|^2 \cong \left[1 - \left(\frac{k_z\,\omega_p}{k\,\omega_c}\right)^2\right]^2 + \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(k L_0)^4}\left\{\frac{\omega_c}{|k_z|\,v_0}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_c}{k_z v_0}\right)^2\right] + \frac{(\mp\omega_c - k_z V_e)}{|k_z|\,v_1}\,\frac{\Delta n}{n}\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mp\omega_c - k_z V_e}{k_z v_1}\right)^2\right]\right\}^2.$$

It is more convenient to carry out the integration in spherical coordinates i.e., $k_z = k\mu$, $k_\perp = k\sqrt{1-\mu^2}$, $d\mathbf{k} = 2\pi k^2\, dk\, d\mu$. There is a resonance for $\mu^2 = \omega_c^2/\omega_p^2$ that is sufficiently narrow to permit approximate methods of integration as long as $ka_0 \ll 1$ and $(\Delta n/n)\,(v_0/v_1)^2 \ll 1$. After integrating across the resonance

$$D \cong \frac{4}{(2\pi)^3}\,\frac{a_0^2 e^2}{L_0^2}\,\frac{1}{m v_0}\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^3 a_0^3 \int_0^{1/a_0} k^2\, dk \times \left\{\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{k v_0}\right)^2\right] + \frac{v_0}{v_1}\,\frac{\Delta n}{n}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p - kV_e}{k v_1}\right)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{k v_0}\right)^2\right] + \frac{\omega_p - kV_e}{\omega_p}\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^3\frac{\Delta n}{n}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p - kV_e}{k v_1}\right)^2\right]}\right\} \tag{67}$$

If $\Delta n/n = 0$, the result is small compared to Eq. (66). However, if

$$\frac{\Delta n}{n} \to \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 \frac{V_e}{v_1}\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{V_e}{v_0}\right]^2,$$

the denominator in Eq. (67) becomes infinite for $k \cong \omega_p/V_c$. We may therefore expect significant contributions to the diffusion coefficient from the collective modes when they become unstable. The present formalism is not suitable for calculating the diffusion coefficient under these circumstances, since it diverges. It should be possible to treat the linear phase of instabilities by an extension of the present formalism in which the time-dependence of the Fokker-Planck coefficients is retained.

References

[1] M. Lax, *Rev. Mod. Phys.* **32** (1960) 25
[2] Rostoker, N. and Rosenbluth, M. N., *Phys. Fluids* **3** (1960) 1
[3] Lenard, A., *Annals Phys.* (*N. Y.*) **3** (1960) 390
[4] Rostoker, N., *Phys. Fluids* **3** (1960) 17
[5] Spitzer, L., Jr., *Phys. Fluids* **3** (1960) 659

(Manuscript received on 12 October 1960, Section 1, and on 2 November 1960, Section 2)

NUCLEAR FUSION 1 (1961) 121-124

EQUILIBRE ET STABILITE D'UN PLASMA EN SYMETRIE DE REVOLUTION AVEC PRESSION ANISOTROPE

C. Mercier et M. Cotsaftis

Groupe de recherches de l'association Euratom-CEA sur la fusion

Fontenay-aux-Roses, Seine, France

Dans ce travail, on étudie la stabilité des plasmas en symétrie de révolution avec une pression anisotrope en généralisant les méthodes employées dans un article précédent [*Fusion Nucléaire* **1** (1960) 47]. On étend la condition nécessaire de stabilité déjà trouvée en pression scalaire et de plus apparaissent deux conditions nouvelles toujours vérifiées dans le cas précédent.

Introduction

Dans un travail précédent [1], l'un de nous avait obtenu un critère local généralisant le critère de Suydam en géométrie de révolution avec pression scalaire. Nous allons ici étendre les résultats précédents au cas de la pression non scalaire en géométrie de révolution. Le fait nouveau est l'apparition de deux conditions entre les pressions parallèle et perpendiculaire qui doivent être vérifiées en tout point du plasma pour que la stabilité soit possible. Elles s'écrivent:

$$-\sigma_\perp \left[\frac{1+\frac{5}{3}\sigma_-}{1+2\sigma}\right] < \sigma_- < 1 \qquad (1)$$

en posant:

$$\sigma_- = \frac{p_\parallel - p_\perp}{|\mathbf{B}|^2} \qquad \sigma_\perp = \frac{p_\perp}{|\mathbf{B}|^2}$$

et en utilisant le système de Gauss rationalisé avec $c=1$.

Ces conditions sont identiques à celles de R. Lüst [2] et de L. I. Rudakov et R. Z. Sagdeev [3] obtenues pour un plasma homogène infini dans un champ magnétique uniforme. Quand ces inégalités sont satisfaites, on établit un critère analogue à celui du cas scalaire.

Etudes des équilibres

Ils sont régis par les équations:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathrm{div}\,\mathsf{p} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \qquad (2)$$

où nous supposerons en analogie avec [2] que:

$$\mathsf{p} = p_\perp\,(\mathsf{I} - \mathbf{ee}) + p_\parallel\,\mathbf{ee}$$

avec $\mathbf{e}$ le vecteur unité $\mathbf{B}/B$ et I l'unité dyadique.

Le système peut alors s'écrire sous la forme:

$$(1-\sigma_-)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} \times \mathbf{B} - \mathbf{B}\,(\mathbf{B}\cdot\mathrm{grad}\,\sigma_-) = \mathrm{grad}\,\bar{p} - \tfrac{1}{2}B_t^2\,\mathrm{grad}\,\sigma_-$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \qquad (3)$$

en posant:

$$B_t^2 = |\mathbf{B}|^2, \quad \bar{p} = \tfrac{1}{2}\,(p_\parallel + p_\perp).$$

En symétrie de révolution la solution de $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ s'écrit:

$$\mathbf{B} = B_\theta\,\mathbf{e}_\theta + B\,\mathbf{e}_\chi = (T/r)\,\mathbf{e}_\theta - (1/r)\,\mathbf{e}_\theta \times \mathrm{grad}\,\psi \qquad (4)$$

avec les mêmes notations que dans [1], voyez l'expression (1), page 47.

En projettant sur les trois axes (ψ, ϑ, χ) du système adapté défini dans [1], voyez page 48, on obtient:

$$T\,(1 - \sigma_-) = g\,(\psi)$$
$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \chi} + \frac{B_t^2}{2}\frac{\partial \sigma_-}{\partial \chi} = 0$$
$$(1-\sigma_-)\left[\frac{T}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \chi} - \frac{j_\theta}{r}\right] + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi} - \frac{B_t^2}{2}\frac{\partial \sigma_-}{\partial \psi} = 0 \qquad (5)$$

avec:

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{rJB}\frac{\partial T}{\partial \psi}\,\mathbf{e}_\psi - \frac{r}{J}\frac{\partial}{\partial \psi}(JB^2)\,\mathbf{e}_\theta + B\frac{\partial T}{\partial \psi}\,\mathbf{e}_\chi, \qquad (6)$$

où $g\,(\psi)$ est une fonction quelconque de ψ.

Remarque

Les conditions aux limites, si le plasma est supposé entouré d'un conducteur parfait, imposent que la limite soit une surface ψ = constante et que σ_- soit constant sur cette limite. Un moyen simple de réaliser cette condition, et peut être le seul, est de supposer que: $\sigma_- = \sigma_-\,(\psi)$. Dans ce cas le système précédent se simplifie considérablement et devient:

$$\sigma_- = \sigma_-\,(\psi)$$
$$T = T\,(\psi) \qquad (7)$$
$$\bar{p} = \bar{p}\,(\psi)$$

et ψ est déterminé pour l'équation:

$$H\psi - \frac{1}{2}\frac{\sigma_-'}{1-\sigma_-}|\mathrm{grad}\,\psi|^2$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\sigma_-}[T^2(1-\sigma_-)]' - \frac{r^2\bar{p}'}{1-\sigma_-} \qquad (8)$$

avec:

$$H = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Le système est alors parfaitement analogue au cas scalaire. Dans le cas plus particulier où σ_- est choisie constant, la dernière équation s'écrit:

$$H\psi = -\frac{1}{2}(T^2)' - r^2 p_f' \qquad (9)$$

où

$$p_f = \frac{p}{1-\sigma}\,.$$

qui est identique à l'équation dans le cas scalaire; ce qui montre que dans ce cas l'introduction d'une pression non scalaire ne modifie en rien l'équilibre à condition de définir une pression fictive p_f.

Stabilité

On part du δW_F de Bernstein *et al.* [4, p. 27] qui s'écrit:

$$\begin{aligned}\delta W_F = \frac{1}{2}\int d\tau \Big\{ & |\mathbf{Q}|^2 - \mathbf{j}\cdot\mathbf{Q}\times\boldsymbol{\xi} + \operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\,(\boldsymbol{\xi}\cdot\operatorname{grad} p_\perp) \\ & - \sigma\ (\mathbf{Q} + \mathbf{B}\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} + (B/B_t^2)\,\boldsymbol{\xi}\cdot\operatorname{grad}\tfrac{1}{2}B_t^2) \\ & (\mathbf{Q} + \mathbf{B}\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} + \operatorname{grad}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{B} - \boldsymbol{\xi}\times\mathbf{j}) \\ & + [(\mathbf{B}\nabla)\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{B}/B_t^2]\operatorname{div}(\sigma_- B_t^2\,\boldsymbol{\xi}) \\ & + 4\sigma_-[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{B}/B_t]^2 + \frac{5}{3}p_\perp(\operatorname{div}\boldsymbol{\xi})^2 \\ & + \frac{1}{3}p_\perp[\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} - (3/B_t^2)(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{B}]^2\Big\} \qquad (10)\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}. \qquad (11)$$

Le terme de surface disparaît avec la seule condition $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi} = 0$ dans le cas où $\sigma_- =$ constante sur la surface limite.

Dans le système adapté, en utilisant les équations d'équilibre, le δW_F devient:

$$\delta W_F = \frac{1}{2}\int I\, d\psi\, d\theta\, d\chi$$

$$\begin{aligned} I = {} & \frac{1-\sigma_-}{J r^2 B^2}(DX)^2 + \frac{(1-\sigma_-)\,r^2}{J}\left(\frac{\partial U}{\partial\chi} - T\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JX}{r}\right)^2 \\ & + (1-\sigma_-)\,JB^2\left(\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{\partial X}{\partial\psi} - \frac{1}{JB^2}\frac{\partial JB^2}{\partial\psi}X\right)^2 \\ & - 2JKX^2 + \frac{5}{3}\frac{p_\perp}{J}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}(JX) + J\frac{\partial U}{\partial\theta} + DZ\right)^2 \\ & + \frac{1}{3}\frac{p_\perp}{J}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\psi}(JX) + J\frac{\partial U}{\partial\theta} + D\cdot Z \\ & - \frac{3}{B_t^2}\Bigg(D\cdot(TU + B_t^2 Z) + JX\left(z - \frac{1}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right) \\ & - \frac{Z}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\chi} - U\frac{\partial T}{\partial\chi}\Bigg)\Bigg]^2 + \frac{\sigma_- B_t^2}{J}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\psi}(JX) + J\frac{\partial U}{\partial\theta} \\ & + D\cdot Z - \frac{1}{B_t^2}\Bigg(D\cdot(TU + B_t^2 Z) + JX\left(z - \frac{1}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right) \\ & \qquad - \frac{Z}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\chi} - U\frac{\partial T}{\partial\chi}\Bigg)\Bigg]^2 \\ & + \frac{3\sigma_-}{JB_t^2}\Bigg[D(TU + B_t^2 Z) + JX\left(z - \frac{1}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right) \\ & \qquad - \frac{Z}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\chi} - U\frac{\partial T}{\partial\chi}\Bigg]^2 \\ & + \frac{\partial\sigma_-}{\partial\chi}\Bigg[-XZ\Bigg(-\frac{1}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi} - \frac{T}{r^2}\frac{\partial T}{\partial\psi} - \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\psi}(JB^2) \\ & + \frac{T}{J}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{JT}{r^2}\right) + \frac{B_t^2}{J}\frac{\partial J}{\partial\psi}\Bigg) - 2B^2 Z\frac{\partial U}{\partial\theta} + 2T\frac{Z}{J}\frac{\partial U}{\partial\chi} \\ & - 2B_t^2 Z\frac{\partial X}{\partial\psi} + \frac{\partial}{\partial\psi}(TXU) + B_t^2\frac{\partial XZ}{\partial\psi} + \frac{Z^2}{2J}\frac{\partial B_t^2}{\partial\chi}\Bigg] \\ & + \frac{\partial\sigma_-}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(TUX + \frac{B_t^2}{2}XZ\right) + \frac{\partial p}{\partial\psi}\frac{\partial(XZ)}{\partial\chi}, \qquad (12)\end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned} r\,B\,\xi_\psi &= X \\ (\xi_\theta/r) - T\,\xi_\chi/(r^2\,B) &= U \\ \xi_\chi/B &= Z \end{aligned}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial\chi} + \frac{JT}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$z = \frac{T}{r^2}\frac{\partial T}{\partial\psi} + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\psi}(JB^2)$$

$$\begin{aligned} 2JK = {} & \Bigg[z\frac{\partial J}{\partial\psi} + \frac{1}{JB^2}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}(JB^2)\right)^2 \\ & - T\frac{\partial T}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{J}{r^2}\right)\Bigg](1-\sigma_-) - J\frac{\partial\sigma_-}{\partial\psi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right).\end{aligned}$$

On développe en série de Fourier les X, U et Z

$$\begin{aligned} X &= \sum_m X_1^m\cos m\theta + X_2^m\sin m\theta \\ U &= \sum_m \frac{U_1^m}{m}\sin m\theta - \frac{U_2^m}{m}\cos m\theta \\ Z &= \sum_m Z_1^m\cos m\theta + Z_2^m\sin m\theta, \end{aligned} \qquad (13)$$

et on pose:

$$\begin{aligned} X_m &= X_1^m + \mathrm{i}\,X_2^m \\ U_m &= U_1^m + \mathrm{i}\,U_1^m \\ Z_m &= Z_1^m + \mathrm{i}\,Z_2^m. \end{aligned} \qquad (14)$$

En analogie avec [1], voyez page 50, nous étudierons les déplacements définis comme suit:

$$\begin{aligned} X_m &= \varrho(\psi)\exp(\mathrm{i}\,\varphi), \\ Z_m &= (\mathrm{i}\,k/m)\,X_m, \\ U_m &= h\,X_m - (\partial/\partial\psi)\,X_m \end{aligned} \qquad (15)$$

avec:

$$\varphi = m\int_a^\chi (JT/r^2)\,d\chi + \nu(\psi)\,\chi\,.$$

Les fonctions arbitraires $h(\chi,\psi)$, $k = k(\chi,\psi)$ seront supposées réelles et bornées pour $m \to +\infty$

$$\nu(\psi) = \frac{2\pi K - m\theta_0}{\chi_0} \qquad \theta_0 = \oint\frac{JT}{r^2}\,d\chi\,. \qquad (16)$$

Nous cherchons un critère local au voisinage des surfaces $\psi = \psi_0$ où $2\pi K - m\,\theta_0 = 0$. Aussi supposerons nous $\varrho(\psi)$ nulle à $\psi_0 \pm \Delta\psi$ et les quantités non singulières à ψ_0 seront prises avec leur valeur en ψ_0 dans I.

Dans ce cas ν s'écrira:

$$\nu(\psi) = (\psi - \psi_0)\left(\frac{\partial\nu}{\partial\psi}\right)_0 = -m(\psi - \psi_0)\,\bar{\mu}'$$

$$\bar{\mu}' = \frac{\partial}{\partial\psi}\oint\frac{JT}{r^2}\,d\chi\Big/\oint d\chi\,. \qquad (17)$$

En reportant ces déplacements dans δW_{Fm} on constate que le minimum s'obtient pour $m = \infty$. Alors $\delta W_{F\infty}$ s'écrit:

$$\delta W_{F\infty} = \frac{\pi}{2}\int \mathcal{J}\,\varrho^2(\psi)\,d\psi\,d\chi \qquad (18)$$

$$\mathcal{J}=(1-\sigma_-)\frac{r^2}{J}\left[\frac{J}{r^2}\frac{\partial T}{\partial\psi}-\bar\mu'-\bar\mu'(\psi-\psi_0)\frac{\varrho'}{\varrho}-\frac{JT}{r^2}h\right]^2$$
$$+(1-\sigma_-)JB^2\left[h-\frac{1}{JB^2}\frac{\partial}{\partial\psi}JB^2\right]^2$$
$$+2JK\left(\frac{5}{3}\frac{p}{J}\right)\left[\frac{\partial J}{\partial\psi}+Jh-y\right]^2$$
$$+\frac{1}{3}\frac{p}{J}\left[\frac{\partial J}{\partial\psi}-\frac{3}{B_t^2}\left(J\left(z-\frac{1}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right)+T\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-T\bar\mu'-T\bar\mu'(\psi-\psi_0)\frac{\varrho'}{\varrho}\right)+Jh+2y\right]^2$$
$$+\sigma_-\frac{B_t^2}{J}\left[\frac{\partial J}{\partial\psi}-\frac{1}{B_t^2}\left(J\left(z-\frac{1}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right)+T\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-T\bar\mu'-T\bar\mu'(\psi-\psi_0)\frac{\varrho'}{\varrho}\right)+Jh\right]^2$$
$$+3\frac{\sigma_-}{JB_t^2}\left[T\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}-T\bar\mu'-T\bar\mu'(\psi-\psi_0)\frac{\varrho'}{\varrho}\right.$$
$$\left.+J\left(z-\frac{1}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right)-yB_t^2\right]^2$$

Ceci peut être écrit:

$$\mathcal{J}=a\,h^2+2\,b\,h\,y+c\,y^2+2\,d\,h+2\,e\,y+f \qquad (19)$$

avec: $y=(\psi-\psi_0)\,\bar\mu'\,k,\quad a=J\,B_t^2\,[1+(2\,p_\perp/B_t^2)],$

$b=-p_\perp,\qquad c=3\,p_\parallel/J.$

$$d=-\left(1+\frac{p_\perp}{B_t^2}\right)E+2\bar p\,\frac{\partial J}{\partial\psi}+T(1-\sigma_-)\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}$$
$$+\frac{J}{2}\frac{p_\parallel}{B_t^2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}.$$

$$e=-\left(3\,\sigma_-+2\frac{p_\perp}{B_t^2}\right)\frac{E}{J}+\left(\frac{p_\parallel}{B_t^2}+\frac{\sigma_-}{2}\right)\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}-\frac{p_\perp}{J}\frac{\partial J}{\partial\psi},$$

$$f=\left[1-\sigma_-+\frac{3\,T^2}{r^2\,B_t^2}\frac{p_\perp}{B_t^2}+4\sigma_-\frac{T^2}{r^2\,B_t^2}\right]\frac{E^2\,r^2}{T^2\,J}$$
$$+2E\left[\frac{r^2(1-\sigma_-)}{JT}\left(\frac{Jz}{T}+\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{J}{r^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{p_\parallel}{B_t^2}\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial\psi}+\left(\frac{3\,p_\parallel}{B_t^2}+\sigma_-\right)\frac{1}{2\,B_t^2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right]+J\,(1-\sigma_-)\frac{r^2z^2}{T^2}$$
$$+2z\left[(1-\sigma_-)r^2\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{J}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}J\,(1-\sigma_-)\right]$$
$$+(1-\sigma_-)\,T^2\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{J}{r^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\log\frac{JT}{r^2}-\frac{J}{2}\frac{\partial\sigma_-}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}$$
$$-\frac{2\bar p}{J}\left(\frac{\partial J}{\partial\psi}\right)^2+\frac{p_\parallel}{B_t^2}\cdot\frac{\partial J}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}+\frac{4\,p_\parallel-p_\perp}{4\,B_t^2}\,J\left(\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right)^2, \qquad (20)$$

où:

$$E=T\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}-T\bar\mu'-T\bar\mu'(\psi-\psi_0)\frac{\varrho'}{\varrho}+Jz. \qquad (21)$$

Si on n'impose aucune condition sur h et k, l'application de la méthode de Lagrange à $\delta W_{F\infty}$ fait apparaître une singularité pour k en $(\psi-\psi_0)^{-1}$ non admissible. En prenant des déplacements bornés de même allure que ceux ainsi trouvés, sauf au voisinage de la singularité, on peut montrer que la valeur obtenue pour $\delta W_{F\infty}$ est aussi voisine que l'on veut de la valeur obtenue sans condition. On peut ainsi ne pas tenir compte des conditions de régularité des fonctions h et k.

Deux cas se présentent:

1) *$ac-b^2\le 0$ en un point quelconque sur la surface* $\psi=\psi_0$. Dans ce cas, en peut toujours trouver un déplacement qui rend $\delta W_{F\infty}$ négatif. Par conséquent une condition nécessaire de stabilité s'écrit:

$$\tfrac{1}{3}\,p_\perp{}^2/p_\parallel<2\,(p_\perp+\tfrac{1}{2}\,B_t^2) \qquad (22)$$

Cette formule est identique à l'une des conditions données dans [2] et [3]. Elle s'écrit encore:

$$\sigma\,\frac{1+\frac{5}{3}\sigma}{1+2\sigma}<\sigma_- \qquad (23)$$

2) $ac-b^2>0$

Le minimum s'écrit alors:

$$\delta W_{F\infty}=\frac{\pi}{2}\int M\,d\psi\,d\chi$$
$$M=f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-bd)^2}{a(ac-b^2)}. \qquad (24)$$

La minimisation sur $\varrho\,(\psi)$ se fait comme dans le travail précédent [1]. On se ramène à la forme standard:

$$\delta W_{F\infty}=\frac{\pi}{2}\int\left[\oint M\,d\chi\right]d\psi$$
$$=\frac{\pi C^2}{2}\int[(\psi-\psi_0)^2\,(\varrho')^2+A\,\varrho^2]\,d\psi \qquad (25)$$

dont le minimum s'écrit:

$$\delta W_{F\infty}=\frac{\pi}{2}\,C^2\left(A+\frac{1}{4}\right) \qquad (26)$$

soit encore:

$$\delta W_{F\infty}=\frac{\pi}{2}\oint d\chi\left[\alpha\left(\frac{T\bar\mu'}{2}\right)^2+(2\alpha\omega+\beta)\frac{T\bar\mu'}{2}\right.$$
$$\left.+\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma\right] \qquad (27)$$

$$\omega=T\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}+Jz,\qquad \alpha=\frac{(1-\sigma_-)\,r^2}{J\,T^2}\frac{B^2}{B_t^2}$$
$$2\alpha\omega+\beta=2(1-\sigma_-)\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial\psi}-\frac{z}{B_t^2}\right)$$
$$\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma=-(1-\sigma_-)\frac{Jz^2}{B_t^2}-z\frac{\partial}{\partial\psi}J\,(1-\sigma_-)$$
$$+(1-\sigma_-)\frac{\partial T}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}+(1-\sigma_-)\frac{T^2}{J\,B_t^2}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}J\frac{\partial\sigma_-}{\partial\psi}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}+\frac{2\bar p}{J}\left(\frac{\partial J}{\partial\psi}\right)^2+\frac{p_\parallel}{B_t^2}\frac{\partial J}{\partial\psi}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}$$
$$+\frac{4\,p_\parallel-p_\perp}{4\,B_t^4}J\left(\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right)^2-\frac{1}{a}\left[2\bar p\,\frac{\partial J}{\partial\psi}\right.$$
$$\left.+T\,(1-\sigma_-)\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}+\frac{J}{2}\frac{p_\parallel}{B_t^2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}\right]^2$$
$$-\frac{1}{a(ac-b^2)}\left[(1-\sigma_-)\,p_\perp\,T\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{JT}{r^2}\right.$$
$$+p_\perp\frac{\partial J}{\partial\psi}B_t^2(1-\sigma_-)+\frac{J}{2}\frac{\partial B_t^2}{\partial\psi}p_\parallel\left(3+7\frac{p_\perp}{B_t^2}\right)$$
$$\left.-p_\perp\left(1+2\frac{p_\perp}{B_t^2}\right)\right]^2$$

Il reste encore à minimiser par rapport à une fonction f qui représente le choix du paramètrage en χ des courbes méridiennes des surfaces $\psi =$ constante.

Si χ et χ_0 sont deux paramètrages différents, on a:

$$\chi = f(\chi_0) \quad \text{avec} \quad J\,d\chi = J_0\,d\chi_0 \quad \text{et} \quad \oint d\chi = \oint d\chi_0 = \lambda$$

L'expression à minimiser est de la forme:

$$\oint (P\,f'^2 + Q\,f')\,d\chi \tag{28}$$

où:

$$P = (1 - \sigma_-)\left(\frac{r\,\bar{\mu}'}{2}\,\frac{B}{B_t}\right)^2 \tag{29}$$

Si P est négatif en un point quelconque de la surface $\psi = \psi_0$, on peut toujours trouver un déplacement tel que $\delta\,W_{F\infty}$ soit négatif. Une deuxième condition nécessaire de stabilité s'écrit donc:

$$P > 0 \quad \text{soit} \quad \sigma_- < 1 \tag{30}$$

Cette expression est identique à l'autre condition donnée dans [2] et [3].

Si P est positif, le calcul du minimum donne le critère suivant:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 > 0 \tag{31}$$

avec:

$$Q_1 = \frac{1}{4\oint \dfrac{B_t^2}{(1-\sigma_-)\,r^2 B^2}\,J\,d\chi}\left[\frac{d}{d\psi}\oint \frac{J\,T}{r^2}\,d\chi - 2\oint T\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi}\,\frac{J\,d\chi}{(1-\sigma_-)\,r^2 B^2}\right]^2 - \oint \frac{1}{(1-\sigma_-)\,B^2}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi}\right)^2 J\,d\chi$$
$$+ \oint \sqrt{1-\sigma_-}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{J}{\sqrt{1-\sigma_-}}\right)\frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi}\,d\chi$$

$$Q_2 = \frac{1}{4\oint \dfrac{B_t^2\,T}{r^2 B^2}\,J\,d\chi}\left[\oint \frac{B_t^2}{r^2}\,\frac{T}{B^2}\,J\,d\chi \cdot \oint T\,\frac{\partial \sigma_-}{\partial \psi}\,V\,J\,d\chi - \oint \frac{B_t^2\,T}{r^2 B^2}\,T\,\frac{\partial \sigma_-}{\partial \psi}\,J\,d\chi \cdot \oint V\,J\,d\chi\right]$$

$$V = \frac{B_t^2}{B^2}\left(B_t^2\,\frac{\partial}{\partial \psi}\,\frac{T}{r^2 B_t^2} - 6\,\frac{T}{r^2 B_t^2\,(1-\sigma_-)}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi}\right)$$

$$Q_3 = \oint J\,d\chi\,B_t^2\,X^2\,\frac{(1-\sigma_-)}{\Delta}\,[5\sigma_\perp{}^2 + 9\sigma_-\sigma_\perp + 3\sigma_-{}^2]$$

$$X = \frac{1}{J}\,\frac{\partial J}{\partial \psi} + \frac{1}{2\,B_t^2}\,\frac{\partial B_t^2}{\partial \psi} - \frac{T}{J\,B_t^2}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\,\frac{J\,T}{r^2}$$

$$\Delta = \frac{ac - b^2}{B_t^4} = 3\sigma_-(1 + 2\sigma_\perp) + \sigma_\perp(3 + 5\sigma_\perp)\,.$$

Remarques

1) **Chandrasekhar** *et al.* [5] ont donné aussi deux conditions nécessaires de stabilité en pression non scalaire. L'une d'elles est identique à l'expression (30) tandis que l'autre est différente et plus sévère. Elle s'écrit:

$$\sigma_- > -\sigma_\perp\,\frac{1}{1 + 2\sigma_\perp} \tag{32}$$

à comparer avec

$$\sigma_- > -\sigma_\perp\,\frac{1 + \frac{5}{3}\,\sigma_\perp}{1 + 2\sigma_\perp} \tag{23}$$

2) Quand Δ tend vers zéro, Q tend vers $-\infty$, il y a donc toujours instabilité.

3) Quand σ_- tend vers 1, le terme Q_1 devient infini et en utilisant la relation d'équilibre:

$$T\,(1 - \sigma_-) = g\,(\psi) \tag{33}$$

peut s'écrire:

$$\left[g\oint \frac{B_t^2\,T\,J\,d\chi}{r^2 B^2}\right]^{-1}\left[\left(\oint T^2\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi}\,\frac{J\,d\chi}{r^2 B^2}\right)^2 - \oint \frac{J\,T}{B^2}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi}\right)^2 d\chi \oint \frac{J\,T^3}{r^4 B^2}\,d\chi - \oint \frac{J\,T}{B^2}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi}\right)^2 d\chi \oint \frac{J\,T}{r^2}\,d\chi + \frac{1}{2}\oint \frac{B_t^2\,T\,J\,d\chi}{r^2 B^2}\oint \frac{\partial \bar{p}}{\partial \psi}\,\frac{\partial \sigma_-}{\partial \psi}\,T\,J\,d\chi\right] + \textit{termes finis.} \tag{34}$$

Les trois premiers termes sont négatifs par application de l'inégalité de Schwartz. Si sur une surface ψ, $\sigma_- = 1$ en un point, cette surface ne peut être qu'une surface limite (sauf si $\sigma_- = 1$ est un maximum) parce que d'un côté ou de l'autre la condition de stabilité ne serait pas vérifiée. Par suite des conditions aux limites, $\sigma_- = 1$ partout sur toute la surface ψ. Le plasma ne peut exister que du côté où σ_- décroit. Si la pression est nulle à la limite, $\bar{p}$ ne peut qu'augmenter dans le plasma et par conséquent $(\partial\,\bar{p}/\partial\,\psi)\,(\partial\,\sigma_-/\partial\,\psi)$ est négatif et Q tend vers $-\infty$. Il y a donc instabilité au voisinage de cette surface.

4) Si $\sigma_- = \sigma_-(\psi)$, $Q_2 = 0$. Si en outre sur une surface $\sigma_- = 0$, Q_1 est identique au Q obtenu dans le cas scalaire [1] et $Q_3 = \oint [5\,\sigma_\perp/(5\,\sigma_\perp + 3)]\,B_t^2\,X^2\,J\,d\chi$ qui est positif, ainsi qu'on pouvait le prévoir sur la forme même du δW_F.

Références

[1] Mercier, C., *Fusion Nucléaire* **1** (1960) 47

[2] Lüst, R., *Instabilities for anisotropic pressure* dans Risö Report No. 18 (1960), page 201.

[3] Rudakov, L. I., et Sagdeev, R. Z., "Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions" (traduit et publié en quatre volumes par Pergamon Press, London, 1960): Volume III, page 321.

[4] Bernstein, I. B., Frieman, E. A., Kruskal, M. D., et Kulsrud, R. M., *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A 244** (1958) 17.

[5] Chandrasekhar, S., Kaufman, A. N. et Watson, K. M., *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A 245** (1958) 435.

(Manuscrit reçu le 31 Octobre, 1960)

NUCLEAR FUSION 1 (1961) 125-130

VOLTAGE CHARACTERISTICS OF A ROTATING PLASMA

B. Lehnert

Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden

The balance of forces is investigated for a rotating plasma contained in a long cylindrical vessel and placed in an axial magnetic field. A relation is deduced between the voltage which arises in a radial direction in the plasma and the electric charge being transmitted through the system from an external source. It is found that the equivalent capacity, which describes the electrical behaviour of the plasma, depends upon the transmitted charge and upon the constitution of the vessel wall. An explanation is suggested for the voltage limiting effect earlier observed in the Ixion device.

1. Introduction

The study of a rotating magnetized plasma is of importance both in astrophysics and in research on controlled thermonuclear fusion. Most of the configurations discussed so far are axially symmetric and include a poloidal magnetic field in planes through the axis of symmetry. The field confines the plasma in a radial direction and guides it in the rotation around the axis. The present paper concerns the situation where the rotation is produced by an electric current which is generated by external sources and which flows across the magnetic field. Arrangements of this kind have earlier been reported by a number of authors [1]—[4] (see also [5]).

It has been found by Alfvén [6] that a plasma moving across a magnetic field behaves in the same way as an equivalent capacity where the stored energy corresponds to the kinetic energy of the motion. Both Anderson *et al.* [2, 3] and Boyer *et al.* [4] point out that this capacity will be modified in a rotating plasma when the centrifugal force becomes large enough to deform the magnetic field. Part of the energy fed into the system will then be used to increase the potential energy of the field.

In the present paper the distortion of the magnetic field and its influence on the equivalent capacity will be investigated. In particular, the situation will be studied where the energy is fed into the system from a condenser bank. This gives information about the voltage characteristics which describe the relation between the voltage of the bank before connection to the plasma device and the voltage across the plasma when full rotation has been established. Due to the deformation of the magnetic field the equivalent capacity will depend upon the voltage applied across the device and upon the constitution of the walls of the discharge chamber. As a consequence, the characteristics will not become linear and the voltage across the plasma may sometimes have a tendency to saturate when the voltage of the energy source is increased.

These phenomena will be studied in the following sections for the simplified situation of a long, cylindrical configuration.

2. Theory on the balance of forces

2.1 Basic equations and approximations

Consider a quasi-neutral, dissipation-free plasma of density ϱ where the centre of mass of a fluid element moves with the velocity $\mathbf{v}$ and the electric current density is $\mathbf{i}$. Conservation of mass and charge is expressed by

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dt} \tag{1}$$

and

$$\operatorname{div}\mathbf{i} = 0, \tag{2}$$

where $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$. Conservation of momentum is represented by the equation of motion

$$\varrho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i}\times\mathbf{B} - \nabla p \tag{3}$$

and by Ohm's law

$$0 = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} - \frac{m_i - m_e}{e\varrho}\,\mathbf{i}\times\mathbf{B} + \frac{1}{e\varrho}\,(m_i\nabla p_e - m_e\nabla p_i), \tag{4}$$

where $\mathbf{B}$ is the magnetic field, $\mathbf{E}$ the electric field and p is the sum of the ion pressure p_i and the electron pressure p_e. The rest of the symbols used in Eq. (4) have their conventional meaning. In Eqs. (3) and (4) the time changes are assumed to be slow enough and the radii of gyration small enough for terms containing $\mathbf{i}\cdot\nabla$ and $d(\mathbf{i}/\varrho)/dt$ to be neglected.

To the system of Eqs. (1)—(4) are added Maxwell's equations

$$\operatorname{curl}\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{i} \tag{5}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{6}$$

where μ_0 indicates the magnetic permeability in vacuo and MKS-units are used.

Introduce the velocity

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - (m_i - m_e)\,\mathbf{i}/e\,\varrho \tag{7}$$

and substitute $\mathbf{E}$ from Eq. (4) into Eq. (6). Observing that $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ and using Eqs. (1) and (2) together with well-known vector operations for curl $(\mathbf{v}^*\times\mathbf{B})$, the result becomes

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla\right)(\mathbf{B}/\varrho) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\varrho} \cdot \nabla\right)\mathbf{v}^* + \frac{1}{e\varrho^3}\left(m_\mathrm{i}\nabla p_\mathrm{e} - m_\mathrm{e}\nabla p_\mathrm{i}\right) \times \nabla\varrho. \quad (8)$$

When $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}$ and the pressure terms vanish, Eq. (8) becomes identical with a relation earlier deduced by WALÉN [7]. Observe that the pressure terms vanish when the pressure and density gradients are parallel.

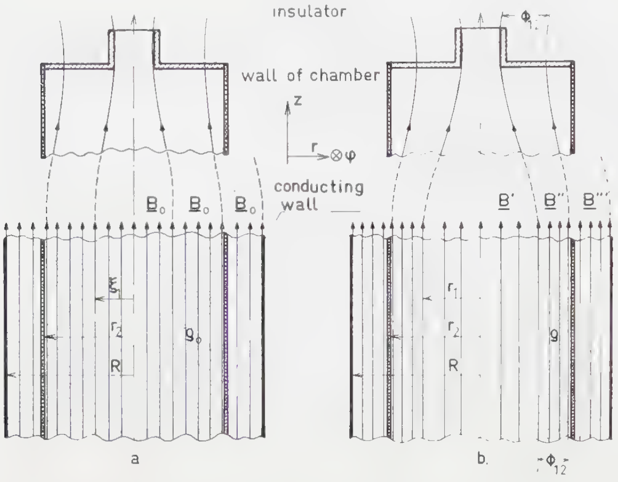

Fig. 1 Axially symmetric configuration with axial magnetic field and radial electric field which set the plasma into rotation in the φ-direction within the dotted regions of the figure. The upper parts of the figure show the ends of the configuration and the lower parts the central region which is assumed to be situated far from the ends. a—situation at the beginning of the rotation; b—situation when a radial expansion is caused by the centrifugal force. The voltage Φ_{12} across the rotating plasma is applied between the cylindrical wall of the chamber and the edge of the hole of the insulator.

The discussion will now be restricted to a simple cylindrically symmetric configuration where the following assumptions are valid and apply to Fig. 1:

(i) All field quantities are independent of φ and z in a cylindrical co-ordinate system (r, φ, z) with z along the axis of symmetry.

(ii) Initially there exists a homogeneous magnetic field $\mathbf{B}_0$ along the z-axis within the space to be studied by the present theory. The region occupied by the plasma has a constant initial density ϱ_0.

(iii) An electric field component E_r is applied in the radial direction which creates a total current density i_r and sets the plasma into rotation around the axis. This gives rise to a centrifugal force, a radial expansion, an induced electric field E_φ and a current i_φ.

(iv) The radial expansion velocity v_r of the centre of mass of the plasma is much smaller than the velocity v_φ of rotation.

(v) The magnetic field generated by the current i_r is neglected; only the field arising from i_φ is taken into account. Consequently, the resulting magnetic field $\mathbf{B}$ will be directed along the z-axis.

With these assumptions the basic equations (3), (4), (5) and (8) reduce to

$$\varrho v_\varphi^2/r = (B/\mu_0)\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (9)$$

$$\varrho\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \varrho v_r\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\right) = -i_r B, \quad (10)$$

$$0 = E_r + v_\varphi B - \frac{m_\mathrm{i} - m_\mathrm{e}}{e\varrho} i_\varphi B + \frac{1}{e\varrho}\left(m_\mathrm{i}\frac{\partial p_\mathrm{e}}{\partial r} - m_\mathrm{e}\frac{\partial p_\mathrm{i}}{\partial r}\right), \quad (11)$$

$$B/\varrho = B_0/\varrho_0. \quad (12)$$

For a rough estimate of orders of magnitude, space derivatives can be approximated by inverted characteristic lengths. In doing so, it is found that the ratio between the pressure term in Eq. (9) and the left hand member of the same equation is of the order of the square of the ratio between the thermal velocity of the ions and the velocity of rotation v_φ. The result is valid when the characteristic length of the pressure variation is of the order of the dimensions of the configuration and when the electron temperature does not exceed that of the ions by very much. The following discussion will be simplified by assuming a temperature which is low enough for the pressure gradient to be neglected in Eq. (9).

Further, the magnitude of the third and fourth terms of the right hand member of Eq. (11) is likely to become small compared to that of the second term of the same member. This occurs when the gyro-period of an ion is much shorter than the time required for the mass flow to make one revolution around the axis and when the thermal energy of the particles is much less than the energy corresponding to the radial potential difference across the whole configuration.

2.2 VOLTAGE CHARACTERISTICS AND EQUIVALENT CAPACITY.

When the terms containing the radial velocity v_r in Eq. (10) are neglected, combination with Eq. (12) gives

$$v_\varphi = -B_0 Q(t)/2\pi r\varrho_0, \quad (13)$$

where the electric charge which has been transmitted in a radial direction per unit axial length is

$$Q(t) = \int_0^t 2\pi r i_r \, dt \quad (14)$$

and the initial condition $v_\varphi(0) = 0$ is imposed. It should be pointed out that the terms containing v_r in Eq. (10) cancel when v_φ has the form (13). Consequently, Eq. (13) is a good approximation not only for cases where the radial displacements are small compared with the distance r from the axis. Also observe that the velocity of rotation in Eq. (13) is independent of the state of deformation of the magnetic field as well as of the pressure gradients in Eqs. (9) and (11). Since viscous dissipation has been neglected, the result that v_φ is inversely proportional to r does not contradict the equations of motion. The omission of viscous effects provides a good approximation at high temperatures and in strong magnetic fields where viscous interaction between the fluid layers is strongly reduced in the radial direction. It should also be observed that the force $\eta \nabla^2 v + (1/3)\, \eta \nabla (\mathrm{div}\, \mathbf{v})$ due to dynamic viscosity η vanishes for a velocity field $\mathbf{v} = 0$, const./r, 0.

When the pressure term in Eq. (9) is dropped, according to the assumptions of the preceding paragraph, the magnetic field in the plasma obeys the equation

$$\frac{\partial B}{\partial r} = 2\, B_0 \frac{a^2}{r^3}\,; \qquad a^2 = \frac{\mu_0 Q^2}{8\pi^2 \varrho_0}\,. \tag{15}$$

This is deduced from Eqs. (13), (9) and (12). Thus,

$$B = B_0\, (b'' - a^2/r^2) \tag{16}$$

in the plasma region where b'' is a constant of integration. The magnetic flux contained between surfaces at r_m and r_n is

$$\begin{aligned} \Phi_{mn} &= \int_{r_m}^{r_n} 2\pi r\, B\, dr \\ &= \pi B_0\, b''\, (r_n^2 - r_m^2) - 2\pi\, B_0 a^2 \log (r_n/r_m)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

The problem is now specified by considering the configuration of Fig. 1 which is closely related to the conditions of the Ixion device [4]. Assume a very long cylindrical vacuum chamber where the wall of radius r_2 is used as one electrode. The ends of the chamber are arranged as shown by the upper half of Figs. 1a. and 1b. and are assumed to be far away from the central region shown by the lower half of the same figures. The ends are provided by a pair of hat-shaped insulators. Plasma is injected and fills the space of the chamber. A voltage is applied between the wall at r_2 and the central part of the plasma which is projected through the hole in the insulators as shown. The part of the plasma shown by the dots in Figs. 1a. and 1b. will then be set into rotation and the voltage across the rotating part will be given by Φ_{12}. The potential applied at the edge of the insulator hole will project itself along a magnetic field line to a surface of radius ξ_1 in the lower part of Fig. 1a. This figure shows the situation before the radial expansion by the centrifugal force has taken place and when the magnetic field is homogeneous in the central region of the device. In Fig. 1b. the expansion has moved the inner surface of the plasma in the central region to the radius r_1. If the electrical resistivity of the wall at r_2 is high enough, part of the magnetic flux may diffuse through the wall during the expansion and part of the rotating plasma will be "scraped off" at the wall. The two extreme cases of infinitely-conducting and non-conducting wall are treated here. This is done by introducing a second infinitely-conducting wall at a radial distance R and assuming the resistivity of the chamber wall to be infinite. Then, $R = r_2$ and $R \to \infty$ give the two situations to be studied.

The configuration consists of three regions:

(i) the space inside the inner boundary of the rotating plasma ($r < r_1$),
(ii) the region of the rotating plasma ($r_1 \leq r \leq r_2$), the only region where volume currents are assumed to flow, and
(iii) the region between the chamber wall and the external wall ($r_2 < r < R$).

Quantities in these three regions will be denoted by superscripts ($'$), ($''$) and ($'''$), respectively.

When no surface currents are assumed to exist at the boundaries between the regions, the magnetic field becomes continuous; this then requires that the following relations are fulfilled:

$$B' = B_0\, b'' - B_0\, a^2/r_1^2, \tag{18}$$

$$B''' = B_0\, b'' - B_0\, a^2/r_2^2. \tag{19}$$

Further, the total magnetic flux inside the infinitely conducting wall at $r = R$ should be conserved, i.e.,

$$\begin{aligned} R^2\, B_0 = r_1^2\, B' + (r_2^2 - r_1^2)\, B_0\, b'' \\ - 2\, a^2\, B_0 \log (r_2/r_1) + (R^2 - r_2^2)\, B''', \end{aligned} \tag{20}$$

where use has been made of Eq. (17). Finally, the magnetic flux inside the boundary $r = r_1$ of the rotating plasma should be conserved since the latter has been assumed to have zero resistivity. This gives

$$\xi_1^2 = r_1^2\, (b'' - a^2/r_1^2). \tag{21}$$

Introduce the notations

$$x = r_1/r_2;\ \ x_0 = a/r_2;\ \ x_1 = \xi_1/r_2. \tag{22}$$

Combination of Eqs. (18), (19), (20) and (21) now yields

$$b' = B'/B_0 = x_1^2/x^2, \tag{23}$$

$$b'' = 1 + x_0^2 + (r_2/R)^2\, x_0^2 \log (x^{-2}), \tag{24}$$

$$b''' = B'''/B_0 = 1 + (r_2/R)^2\, x_0^2 \log (x^{-2}), \tag{25}$$

and

$$x^2 = \frac{x_1^2 + x_0^2}{1 + x_0^2 + (r_2/R)^2 x_0^2 \log (x^{-2})}\,. \tag{26}$$

With the approximations introduced in Section 2.1 the voltage Φ_{12} across the rotating plasma can be found from an integration of Eq. (11) by which

$$\Phi_{12} = \int_{r_1}^{r_2} - v_\varphi\, B dr = r_2\, B_0^2\, \psi_{12}/(2\mu_0\, \varrho_0)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

where

$$\begin{aligned} \psi_{12} = x_0[1 + x_0^2 + (r_2/R)^2 x_0^2 \log (x^{-2})] \log (x^{-2}) \\ - x_0^3 (x^{-2} - 1) \end{aligned} \tag{28}$$

and use has been made of Eqs. (16) and (24).

From Eqs. (15) and (22) the electric charge transmitted per unit length becomes

$$Q = 2\pi r_2 x_0 \left(\frac{2\varrho_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Eqs. (27) and (29) can be used in a formal deduction of an equivalent capacity per unit length

$$C = \frac{4\pi\varrho_0 x_0}{B_0^2 \psi_{12}} \tag{30}$$

which depends upon the deformation of the magnetic field, upon the transmitted charge Q, and upon the constitution of the chamber wall. Roughly speaking, a considerable deformation of the magnetic field takes place when the parameter x_0 exceeds unity.

In the special situation where the transmitted charge consists of a constant contribution Q_0, together with the charge supplied from an external condenser bank of capacity C_s and initial voltage V_s, the total charge per unit length becomes

$$Q = Q_0 + C_s \,(V_s - \boldsymbol{\Phi}_{12}) \,/\, L, \tag{31}$$

where L is the effective axial length of the rotating plasma. Eqs. (29) and (31) yield

$$V_s - \boldsymbol{\Phi}_{12} \quad (L/C_s)\,[2\pi\, r_2\, x_0\, (2\varrho_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} - Q_0] \tag{32}$$

The voltage characteristics which describe the relation between the voltage V_s of the energy source and the voltage $\boldsymbol{\Phi}_{12}$ across the plasma are determined by Eqs. (26), (28), (27) and (32).

Because of diffusion through the chamber wall the magnetic flux Φ_{02} inside $r = r_2$ will be changed by the relative amount

$$\Delta\Phi_{02}/\Phi_{02} = [1 - (r_2/R)^2]\; x_0^2 \log\,(x^{-2}) \tag{33}$$

as calculated from Eq. (25).

Before a studying a specific example we shall examine two limiting cases:

(i) Small transmitted charge:

When x_0 is much less than unity, x approaches x_1 and there is negligible deformation of the initial field. Then ψ_{12} tends to $x_0 \cdot \log\,(1/x_1^2)$ and the equivalent capacity is

$$C_0 = \frac{2\pi\varrho_0}{B_0^2 \log\,(x_1^{-1})} \tag{34}$$

as earlier shown by Anderson *et al.* [3]. The constitution of the wall does not influence the result at small transmitted charges.

(ii) Large transmitted charge:

When x_0 becomes very large, x approaches unity, i.e., the plasma is expanded violently towards the wall at $r = r_2$. A series expansion of Eqs. (26) and (28) then shows that ψ_{12} tends to $(1 - x_1^2)\,x_0$ for an infinitely-conducting wall ($R = r_2$) and to $(1 - x_1^4)/2\,x_0$ for a non-conducting wall ($R \to \infty$).

When the transmitted charge becomes large the magnetic field is heavily distorted and there is a marked influence by the constitution of the wall. For an infinitely-conducting wall the magnetic field will "lean" against its inner surface and the equivalent capacity tends to

$$C_\infty = \frac{4\pi\varrho_0}{B_0^2\,(1 - x_1^2)} = \frac{2\,C_0 \log\,(x_1^{-1})}{(1 - x_1^2)}\,. \tag{35}$$

As an example $C_\infty/C_0 = 2.29$ for the Ixion where x_1 is about 0.375. The increase in the equivalent capacity is caused by a storage of potential energy in the magnetic field as pointed out by Anderson *et al.* [3], who have deduced Eq. (35) in a different way. All the magnetic and kinetic energy stored in a dissipation-free plasma with an infinitely-conducting boundary can be recovered. However, when the bounding wall has finite conductivity and the magnetic field can diffuse through it, part of the energy will be dissipated when the plasma is "scraped off" the wall and cannot be recovered. In the limit of large transmitted charge it can then be seen from Eqs. (13), (16), (23), (24), (25), (29) and (30) that the kinetic energy within the plasma and the change in magnetic energy both approach the value $\pi\,(1 - x_1^4)\, r_2^2\, B_0^2/2\mu_0$ per unit length however large the passed charge Q becomes.

3. Applications to experiments

3.1. Experimental conditions

The present theory will now be applied to the experiments with the Ixion reported by Boyer *et al.* [4], Baker and Hammel [8, 9], and Baker and Ribe [10]. According to Baker and Hammel [11] a cylindrical plasma beam with an effective diameter of 0.09 m acts as centre electrode. The diameter of the cylindrical wall of the chamber is 0.24 m and the length 0.9 m. Consequently, we put $\xi_1 = 0.045$ m, $r_2 = 0.12$ m and $x_1 = 0.375$. The magnetic field at the surface of the end insulators is 2.2 times stronger than that at the median plane.

Boyer *et al.* report an experiment where deuterium is injected corresponding to a pressure of 1.5×10^{-3} mmHg and that impurities of H, C^{II}, Fe^{I}, Fe^{II}, Si^{III}, Si^{II} and O^{II} are released from the walls at an early stage of the discharge and take part in the rotation. The amount of the impurities corresponds to about 10^{-3} mmHg in the experiment described by Boyer *et al.*, i.e., about 40 % of the total number of particles. Impurities contribute to the density also in later experiments with the Ixion [11].

The present theory for the balance of forces will now be applied to the median plane of the Ixion where the magnetic field is nearly homogeneous. In order to determine the actual density within this region of the rotating plasma we have to estimate the effective axial length L. The axial contraction of the plasma towards the median plane produced by the centrifugal force then has to be taken into account. As shown by the author in an earlier paper [12] this contraction can become considerable when the mirror ratio of the device is large.

An estimate of the actual density in the median plane can be made by applying the present theory to the measurement by Baker and Ribe [10] on the diamagnetic effects of the Ixion. With a capacity $C_s = 140\,\mu F$, a voltage $V_s = 7.5$ kV, a drop to $\boldsymbol{\Phi}_{12} \approx \frac{1}{3} V_s$ when B_0 is about 0.7 V sec/m² the diamagnetic effect gives a field reduction $b' = 0.6$ at the centre of the device. Then, $x^2 = 0.234$ according to Eq. (23). This gives $x_0^2 = 0.219$ for an infinitely-conducting wall and $x_0^2 = 0.122$ for a non-conducting wall and, according to Eq. (32), $L^2\,\varrho_0 \approx 1.4 \times 10^{-6}$ and 2.5×10^{-6} kg/m³, respectively. In the experiment by Baker and Ribe there is a considerable deformation of the magnetic field within an axial length of about 0.2 m. Assuming the main part of the plasma to be situated within this region by putting $L = 0.2$ m, we obtain $\varrho_0 \simeq 3.5 \times 10^{-5}$ and 6.2×10^{-5} kg/m³, respectively.

With the data given by Baker and Hammel [9, 11] for the experiment on voltage limiting in the Ixion, the deuterium has a density of 5×10^{-6} kg/m³ before axial contraction. Then $\varrho_0 \simeq 5 \times 10^{-5}$ kg/m³ if $L = 0.2$ m and 20% impurities of a mean mass number of 30 are assumed to be present. The equations determining the voltage characteristics are not very sensitive to changes in the density. In the following discussion we put $\varrho_0 = 5 \times 10^{-5}$ kg/m³ in the median plane and $L = 0.2$ m.

3.2. VOLTAGE CHARACTERISTICS OF THE IXION

In the experiments on voltage limiting in the Ixion [9, 11] a first bank of 120 microfarads capacity and 7 kilovolts initial voltage was connected to the device to produce a rotating plasma. After the rotation had been established the first bank was disconnected and a second bank of capacity $C_s = 149\,\mu F$ was immediately switched in its place. The voltage V_s of this second bank could be varied up to 20 kilovolts and an external series resistance of 1.33 ohms was used to limit the current through the plasma. In the experiments a voltage increase was observed, the peak value Φ_{12} of which is shown as a function of the bank voltage V_s by the dashed lines in Figs. 2 and 3. As pointed out by Baker and Hammel [9] the peak voltage across the plasma shows a tendency to saturate when the second bank voltage is increased up to 20 kV. After the peak the voltage decreases and passes the value before the connection of the second bank after some 50 to 100 μ sec.

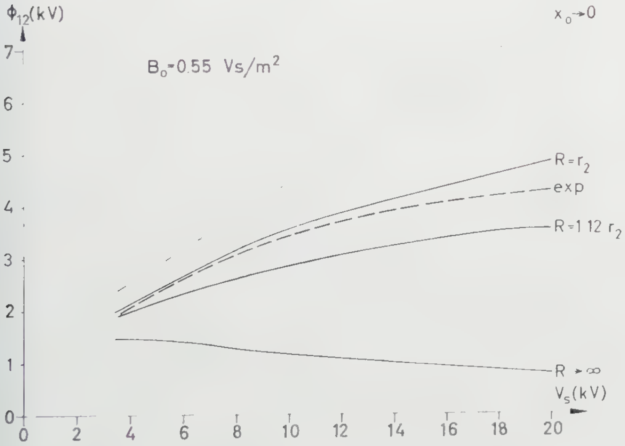

Fig. 2 Voltage Φ_{12} across the rotating plasma in the Ixion as a function of the second capacitor bank voltage V_s. The value of B_0 is 0.55 Vs/m². Dashed curves give experimental results for the peak values of Φ_{12} according to BAKER and HAMMEL [9]. Full curves give calculated voltage characteristics at full charge transfer for an assumed plasma density $\varrho_0 = 5 \times 10^{-5}$ kg/m³ and an effective axial length $L = 0.2$ m. An infinitely conducting chamber wall corresponds to $R = r_2$ and a non-conducting wall to $R \to \infty$. The radial diffusion of the magnetic flux across the wall at $r = r_2$ can be simulated by a proper choice of R. The intermediate full curves demonstrate the case $R = 1.12\, r_2$. Dot-and-dash lines give the characteristics which would have been obtained for a field of infinite rigidity.

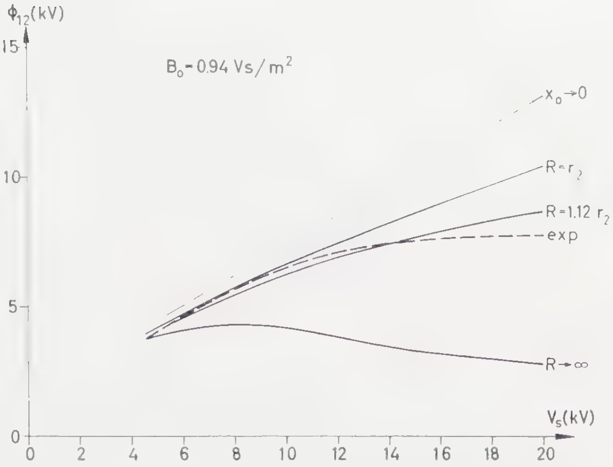

Fig. 3 Voltage Φ_{12} across the rotating plasma in the Ixion as a function of the second capacitor bank voltage V_s. Same as Fig. 2, but with $B_0 = 0.94$ Vs/m².

By means of Eqs. (27), (28), (31) and (32) the voltage Φ_{12} across the plasma has been calculated as a function of the second bank voltage V_s for the magnetic field strengths 0.55 and 0.94 V sec/m². The calculation applies to the situation where the charge has been shared between the bank and the plasma. The results which are shown by Figs. 2 and 3 have been determined from the data of this Section 3.2, where the first bank determines the initial charge Q_0. The full curves demonstrate the cases of infinitely-conducting chamber wall ($R = r_2$), non-conducting wall ($R \to \infty$) and the situation with $R^2/r_2^2 = 1.25$ which allows part of the magnetic flux to leak through the wall at $r = r_2$. Dot and dash lines give the characteristics which would have been obtained without any deformation of the magnetic field.

4. Discussion

The equivalent circuit of a rotating plasma device consists of a capacity, a parallel resistance and an internal series impedance [5]. The latter is determined by the resistivity of the plasma, the Hall current, the presence of neutral gas and by the state of motion. A determination of the magnitude of this impedance is not within the scope of the present paper. We shall only discuss the situation where inductances as well as charge leakage across the parallel resistance can be neglected. There are two possibilities:

(i) The internal series impedance is negligible. The largest voltage which can occur across the plasma is then reached when the charge has been shared between the plasma and the condenser bank.

(ii) The internal series impedance is comparable to or exceeds the external series impedance. A jump of the voltage across the plasma then occurs when the second bank is connected, the jump being determined by the ratio between the internal and external impedances. If this ratio becomes very large the voltage jump may even exceeds the equilibrium value which is approached as soon as the charge has been shared between the second bank and the plasma.

A comparison between the voltage characteristics of Fig. 2 obtained from the Ixion experiments and the calculated curves shows that a possible explanation of the saturation can be provided by the present theory. A very large ratio between the internal and external series impedances should give a voltage jump nearly equal to the second bank voltage; this seems to be ruled out by the experiments. If the same ratio is not too large, however, a saturation of the voltage will be produced by the increase of the equivalent capacity through deformation of the magnetic field, as soon as the charge has been transmitted to the Ixion. In Figs. 2 and 3 the theoretical curves for an infinitely-conducting wall show a strong reduction of the plasma voltage as compared to a situation (the dot and dash lines) corresponding to a magnetic field of infinite rigidity. Observe that the reduction is larger in Fig. 2 than in Fig. 3; the magnetic field is weaker in the former figure than in the latter. For a non-conducting wall the same figures show that the plasma voltage would even drop far below the observed experimental values.

A rough estimate of the field diffusion through the chamber wall can be made by considering the time constant for a circulating azimuthal wall current. With a thickness d_2 and conductivity σ_2 of the wall the time constant becomes about

$$\tau_2 = \tfrac{1}{3}\mu_0 \sigma_2 r_2 d_2. \tag{36}$$

In the experiments on voltage limiting a stainless steel wall of $d_2 = 1.78 \times 10^{-3}$ m thickness has been used [11]. With $\sigma_2 = 1.6 \times 10^6 \, \Omega^{-1} \, \mathrm{m}^{-1}$ this gives $\tau_2 \simeq 210 \, \mu$ sec.

For the bank voltage $V_S = 20$ kV and the conditions applying to Figs. 2 and 3. Eq. (33) would give about 70% reduction of the magnetic flux inside the device if the chamber wall is non-conducting. In the actual case, connection of the second bank gives an increase in the Ixion voltage which lasts for about 30 μ sec. The current induced in the wall by the expanding flux will decay by about 15% when the same time has elapsed. The effect of a flux reduction of 15% by diffusion through the wall can then be simulated by putting $R = 1.12 \, r_2$ which gives the intermediate full curves of Figs. 2 and 3. From these curves is seen that even a slight diffusion of the magnetic field through the chamber wall in an early stage of the discharge reduces the calculated plasma voltage to values nearly equal to the observed ones.

As time is proceeding the magnetic field continues to diffuse through the wall and the plasma approaches a state corresponding to a non-conducting wall after a time of the order of τ_2. The voltage across the device will then decrease appreciably and part of the plasma will be "scraped off" at the wall. This gives one possible explanation of the observed decrease of the voltage [9], about 100 μ sec. after the connection of the second bank. In particular, it would be interesting to see if the voltage characteristics can be modified by the presence of a chamber wall made of a highly conducting material such as copper.

Finally, if there is an increase in the amount of impurities when the bank voltage is increased, then the density of the plasma may become an increasing function of the voltage. This would also contribute to the effects which produce a saturation in the voltage characteristics.

Acknowledgements

The author wants to express his sincere thanks to Drs. D. A. Baker and J. E. Hammel of Los Alamos Scientific Laboratory for supplying a number of data on the Ixion device.

References

[1] Early, H. C., and Dow, W. G., *Phys. Rev.* **79** (1950) 186.

[2] Anderson, O. A., Baker, W. R., Bratenahl, A., Furth, H. P., Ise, J., Kunkel, W. B., and Stone, J. M., *Proc. Second U. N. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, **32** (1958) 155.

[3] Anderson, O. A., Baker, W. R., Bratenahl, A., Furth, H. P., and Kunkel, W. B., *J. Appl. Phys.* **30** (1959) 188.

[4] Boyer, K., Hammel, J. E., Longmire, C. L., Nagle, D., Ribe, F. L., and Riesenfeld, W. B., *Proc. Second U. N. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, **31** (1958) 319.

[5] Lehnert, B., *Progress in Nuclear Energy*: Series XI: Vol. 2, "Plasma Physics and Thermonuclear Research" (J. L. Tuck, Ed.: Pergamon Press 1961).

[6] Alfvén, H., Cosmical Electrodynamics, (Clarendon Press, Oxford, 1950) p. 50.

[7] Walén, C., *Arkiv Mat. Astron. Fysik* **33 A,** No. 18 (1946).

[8] Baker, D. A., and Hammel, J. E., *Bull. Amer. Phys. Soc.*, Ser. II, **5** (1959) 341.

[9] Baker, D. A., and Hammel, J. E., *Bull. Amer. Phys. Soc.*, Ser. II, **5** (1959) 314.

[10] Baker, D. A., and Ribe, F. L., *Bull. Amer. Phys. Soc.*, Ser. II, **4** (1959) 248.

[11] Baker, D. A., and Hammel, J. E., Private communication (1960).

[12] Lehnert, B., *Arkiv f. Fysik*, **18** (1960) 251; *Rev. Mod. Phys.* **32** (1960) 1012.

(Manuscript received on 12 November 1960)

NUCLEAR FUSION 1 (1961) 131—138

PLASMA ACCUMULATION IN A DEVICE FED BY ENERGETIC-ION TRAPPING

R. J. Mackin, Jr.

Oak Ridge National Laboratory*, Oak Ridge, Tennessee, U.S.A.

Plasma accumulation (without energy losses) in a device in which energetic ions are injected and trapped has been discussed by Simon [*J. Nuclear Energy* **C 1** (1960) 215]. Simon has presented a general steady-state theory for devices, such as the OGRA device, where trapping is initiated by interactions with background gas. For such devices there is usually a critical input current or critical plasma density (a function of input current) above which plasma density builds up to a value limited by Coulomb scattering losses. For a specific regime of operation (600-keV hydrogen molecular ion injection and dissociation, highly efficient ion-pumping action of the trapped plasma), simple approximate formulas are derived which describe the critical current or density for plasma build-up. Second-approximation formulas are derived which describe with about 10 % error the overlapping segments of the density versus current curve for a broad range of parameters.

The analysis is then applied to a system in which the initial trapping is accomplished by a Luce carbon arc, e.g. DCX-2. Two new aspects emerge: (1) if the arc is turned off slowly or if an arc of lower density is used, then the critical current for plasma build-up with arc is nearly an order of magnitude less than previously estimated; and (2) the critical arc density, below which plasma build-up occurs after the arc is removed, is sufficiently low that energy losses to fixed-temperature arc electrons are not significant.

The time-dependence of plasma build-up, certain aspects of the impurity problem, and electron heating effects are also considered. Numerical examples are given for OGRA and DCX-2.

1. Introduction

Since the disclosure in 1958 of the thermonuclear experimental devices, DCX, see Barnett *et al.* [1], and Ogra, see Kurchatov [2], work has commenced on a number of similar experiments. All are based on the concept of hot-plasma accumulation by trapping energetic ions in a magnetic container. About a dozen devices working on this principle have gone at least through conceptual design, and the majority are now under construction or in operation.

General calculations of the density of accumulated plasma in such devices are extremely complex because of the large number of phenomena involved. Calculations have been given by Simon [3] for plasma accumulation in a device with a fixed trapping efficiency (e. g. DCX), and [4] for one in which the initial trapping is on the background gas (e. g. OGRA). The latter theory, while taking into account only the most important phenomena, leads to fairly complicated algebraic expressions relating density and current. In practice, their evaluation requires machine computation.

Section 2 of this paper contains derivations of several approximations of Simon's results [4] which are valid over finite ranges of parameters. Each case includes a first-order approximation, which displays the gross effects of parameter scaling, and higher approximations which lead to values of the desired quantities with an error of ten percent or less. The resulting formulas describe the density-current curve over its entire range and give values for the so-called critical currents and densities.

The results are extended in Section 3 to the evaluation of more complicated problems. These include the time-dependence of plasma density build-up and the use of an initial trapping plasma for plasma build-up. Section 3 also includes observations on OGRA and on the techniques for taking account of energy losses to plasma electrons in the framework of the present results.

The calculations presented here are derived entirely from particle capture and loss considerations. There are no specific plasma effects taken into account, which suggests that it would be somewhat surprising if the calculations describe results of actual experiments with any degree of accuracy. A fair case can be made that the results set a lower limit on the requirements for a successful device fed by energetic ions.

Other calculations of this type, but tailored to individual machines, have been given by Gibson et al. [5], Damm *et al.* [6], and Gilbert *et al.* [7]. One of the expressions contained herein has been previously given by Bineau *et al.* [8].**

2. Derivations

These calculations have been tailored for the evaluation of the DCX-2 experiment. Consequently this section will begin with a description of the DCX-2 experiment. The basic particle-balance equations will then be given and the magnitudes of the individual terms evaluated for the expected DCX-2 regime. Finally, the local-approximation formulas will be derived.

---

* Operated by the Union Carbide Corporation for the United States Atomic Energy Commission.

** Note added in proof: A report by Prevot and Gourdon [21], just received, contains many results analogous to those presented here.

2.1 DCX-2

In the DCX-2 experiment, now being designed at Oak Ridge National Laboratory, trapped protons will be accumulated in a magnetic mirror field by the dissociation of a beam of hydrogen molecular ions. The device will be fed by 600-keV H_2^+ or H_3^+ ions, in currents up to 500 ma, which will produce a plasma estimated at 100 liters in volume. Either a high-vacuum arc [9] or the background gas may be used as an initial trapping (dissociating) agent. If an arc is used, the procedure will consist of building up a plasma sufficiently dense that, after the arc is removed, trapping will continue and further build-up will ensue. For this to take place, it is necessary that molecular ions be injected in such a way that their path length in the trapped plasma will be in the order of tens of meters. With the scheme now under consideration, those molecular ions which are not dissociated will tend to remain inside the vacuum chamber and will constitute a large influx of hydrogen gas. It is proposed to rely almost entirely on the strong ion-pumping action of the plasma to remove this gas. Ion-pumping consists of the ionization of gas molecules in the plasma and their subsequent transport along magnetic field lines to a region outside the magnetic mirrors. If, after recombination, the return path through the mirrors is impeded by a constriction, then the gas can be pumped away by comparatively modest conventional pumps.

2.2 Basic equations for an OGRA (no arc)

The first equation is a balance equation relating the capture and loss of protons. Capture takes place by the dissociation of molecular ions and loss by charge-exchange and by scattering through the mirrors. The equation given by Simon (in altered notation) is*

$$\frac{I}{V}\,\frac{C_+ + C_0 + C_c}{1 + C_+ + C_0 + C_c} = n_+\left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_+}\right). \tag{1}$$

The notation is as follows: I is the molecular ion current; V, the plasma volume; C, the "efficiency" of a given capture (dissociation) process, as defined below; n_+, the ion density; and τ, the time constant for a given loss process. The subscript $+$ refers to a process involving trapped ions; o, background gas; and c, cold ions formed by ionization of the background gas.

The ratio $\sum C_i \Big/ \left(1 + \sum C_i\right)$ is the fraction of molecular ions which are dissociated. This form is based on the assumption that in the absence of trapping the molecular ions do not have a fixed path length through the plasma but have a mean free path, L.

An assumption is necessary for the evaluation of the capture terms; namely, that the sum of average internal neutral gas (atom) density $\bar{n}_0$ and cold ion density n_c is equal to the external neutral gas density $\hat{n}_0$. The assumption is plausible but impossible to evaluate without more information than is generally available. Thus

$$C_+ = n_+\,\sigma_B\,L \tag{2}$$

$$C_0 + C_c = \hat{n}_0\,\sigma_B\,L. \tag{3}$$

For convenience, all targets are taken to have the same dissociation cross-section σ_B. Removal of this restriction will be discussed.

The losses are due to charge exchange and to scattering through the mirrors:

$$\frac{1}{\tau_0} = \bar{n}_0\,\sigma_X\,v \tag{4}$$

$$\frac{1}{\tau_+} = n_+\,\sigma_c\,v\,P, \tag{5}$$

where σ_X is the charge-exchange cross-section, v the proton velocity, σ_c the effective Coulomb cross-section for 90° scattering [3], and P the fraction of a sphere subtended by the mirror loss-cone.

The average internal and external atom densities are related approximately, see Simon [10], by:

$$\hat{n}_0 = \bar{n}_0\,[1 + (n_+\,\sigma_d\,v\,\bar{l}/v_0)] \equiv \bar{n}_0 + n_c. \tag{6}$$

Here, σ_d is the cross-section for "destruction" of a neutral and is equal to the sum of the ionization and charge-exchange cross-sections; $\bar{l}$ is the mean chord length of the plasma volume (equal to four times the volume divided by the surface area); and v_0 is the mean velocity of the neutral particles. Throughout, it is assumed that the neutral gas is H_2 and that a molecule is equivalent, as regards cross-section, to two atoms; v_0 is the molecular velocity evaluated at the temperature of the chamber wall. The final results will be generalized to include other gases.

The second balance equation is that for neutral atoms. The rate at which these are removed by the plasma's ionizing action is

$$\hat{n}_0\left[\frac{n_+\,\sigma_d\,v\,f\,V}{1 + (n_+\,\sigma_d\,v\,\bar{l}/v_0)}\right] \equiv \hat{n}_0\,\theta_+ \tag{7}$$

where f is the fraction of the cold ions which are permanently removed from the system; that is, it is the efficiency of the plasma pumping. The factor in brackets is thus the pumping speed θ_+ of the plasma considered as a vacuum pump. Other pumps on the system will be assigned a pumping speed θ_0. There are two gas inputs to the system, one equal to $N_0\,\theta_0$ where N_0 is the neutral density in the absence of beam or plasma, and the other equal to $\Gamma\,I$ where Γ is a constant. (For H_2^+ input, clean chamber walls, and no removal of undissociated beam, $\Gamma = 2$.) Thus

$$\Gamma\,I + \theta_0\,N_0 = \hat{n}_0\,(\theta_+ + \theta_0). \tag{8}$$

Eqs. (1), (6), and (8), with the definitions Eqs. (2)—(5) and (7), give a complete description of the system.

---

* A tabulation of the notation used in the present paper is given in Section 4.

The analysis which follows is aimed at bringing out the results in physically evident and easily accessible form.

2.3 PARAMETERS AND MAGNITUDES OF TERMS

For 600-keV H_2^+ or 300-keV protons in hydrogen,

$$\sigma_B = 4 \times 10^{-17}\ \text{cm}^2 \quad [11]$$
$$\sigma_d = 5 \times 10^{-17}\ \text{cm}^2 \quad [12]$$
$$\sigma_x = 9 \times 10^{-20}\ \text{cm}^2 \quad [13]$$
$$\sigma_c = 3 \times 10^{-23}\ \text{cm}^2 \quad [3]$$
$$v = 7.7 \times 10^8\ \text{cm/sec.}$$
$$v_0 = 1.8 \times 10^5\ \text{cm/sec.}$$

A representative set of conditions for the DCX-2 experiment is:

$$V = 100\ \text{l}$$
$$\theta_0 = 10^4\ \text{l/sec.}$$
$$N_0 = 3 \times 10^{10}\ \text{atoms/cm}^3$$
$$l = 25\ \text{cm}$$
$$L = 10\ \text{m},\ 20\ \text{m}$$
$$P = 0.15$$
$$f = 0.8$$
$$\Gamma = 2.$$

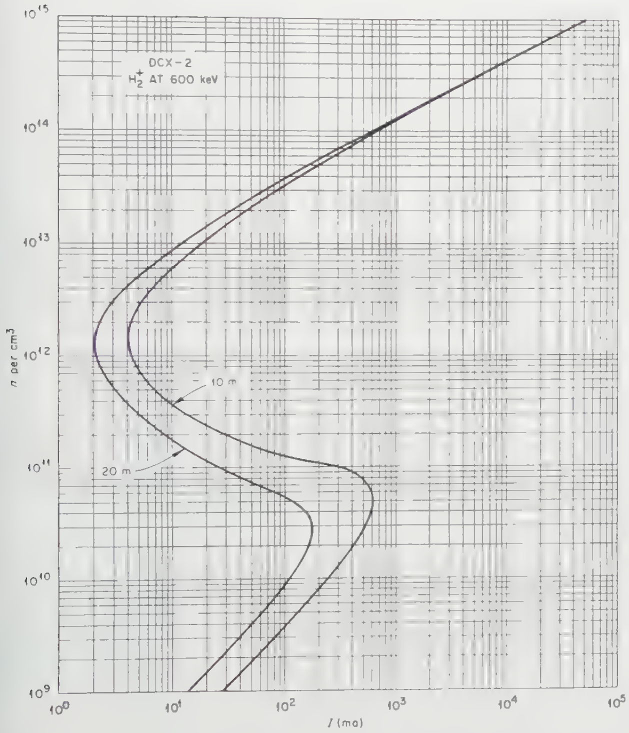

Fig. 1 Plot of equilibrium ion density (cm^{-3}) versus input current in milliamperes for representative DCX-2 parameters. Curves are labeled by molecular-ion path length in plasma. H_2^+ at 600 keV is used.

Accurate density-current relationships based on these parameters are shown in Fig. 1. The S-shaped curves are characteristic of a system in which the trapped plasma plays a significant role in dissociating molecular ions and in pumping out neutral gas. The center branch of the curve represents an unstable equilibrium. A density above that portion of the curve will move up to the upper branch, and one below it will move down to the lower branch. The unstable branch thus describes a critical density which one might attempt to exceed by means of a temporary trapping mechanism in order to permit build-up to the upper branch. The high-current end of the unstable branch is characterized by an "upper critical current" I_{UC}, above which high-density accumulation occurs with no supplementary trapping. Once the high density is achieved, the current may be lowered to the "lower critical current" I_{LC} before the density drops to an uninteresting value.

We wish to get an idea of the relative importance of the various terms in the calculation near the critical points. From Fig. 1, we select an ion density of $10^{11}\ \text{cm}^{-3}$ and an input current of 500 ma. Using the parameters listed above,

$$\hat{n}_0/n_0 = 1.5 \qquad C_+ = 4 \times 10^{-3}$$
$$\theta_+ = 2 \times 10^5\ \text{l/sec.} \qquad C_0 + C_c = 1.2 \times 10^{-4}$$
$$\theta_0 N_0 = 50\ \text{ma equivalent} \qquad 1/\tau_0 = 1.4\ \text{sec.}^{-1}$$
$$\hat{n}_0 = 3 \times 10^{10}\ \text{atoms/cm}^3 \qquad 1/\tau_+ = 3.5 \times 10^{-4}\ \text{sec}^{-1}$$

2.4 FIRST-ORDER FORMULAS; UPPER CRITICAL CURRENT

Noting $\theta_0 \ll \theta_+$ and $\theta_0 N_0 \ll \Gamma I$, we find from Eq. (8):

$$\bar{n}_{00} = \frac{\Gamma I}{n_+ \sigma_d v f V} \tag{9}$$

where the second subscript zero indicates a first approximation. For DCX-2 parameters, $\bar{n}_{00}$ is accurate to about 30% for $I > 150$ ma, $n_+ > 1.5 \times 10^{10}/\text{cm}^3$.

Combining Eqs. (6) and (9)

$$n_{c0} = \frac{\Gamma I l}{f V v_0}. \tag{10}$$

Noting $1/\tau_+ \ll 1/\tau_0$ and $\sum C_i \ll 1$, Eqs. (1) and (9) give:

$$n_+ + \frac{\Gamma I}{n_+ \sigma_d v f V}\left[1 + \frac{n_+ \sigma_d v l}{v_0}\right] = \frac{\Gamma \sigma_x}{f \sigma_d \sigma_B L}. \tag{11}$$

Identifying terms by comparing Eq. (11) with Eq. (1), we note in passing that the charge-exchange loss rate term is independent of current and density and that the cold-ion capture "efficiency" is independent of density.

In the unstable region of the S-curve, dissociation on trapped ions outweighs that on other targets. Thus, to a rough first approximation, the density in this region ("critical density") is given by

$$(n_{+0})_{CR} = \frac{\Gamma \sigma_x}{f \sigma_d \sigma_B L} = 1.1 \times 10^{11} \tag{12}$$

for DCX-2 parameters, independent of current.

For $L = 10$ m, both correction terms (C_0 and C_c) should be included in a second approximation. For larger L, and thus lower n_+, C_0 becomes important and C_c less so. Dropping C_c permits converting Eq. (11) to the form

$$n_+^2 - (n_{+0})_{CR}\, n_+ = \frac{-\Gamma I}{f \sigma_d v V}. \tag{13}$$

This is a parabola whose extremum defines the upper critical current, identified by

$$(n_{+0})_{\mathrm{UC}} = \frac{1}{2}(n_{+0})_{\mathrm{CR}} \tag{14}$$

$$\frac{\Gamma (I_0)_{\mathrm{UR}}}{f \sigma_{\mathrm{d}} v V} = \frac{1}{4}(n_{+0}{}^2)_{\mathrm{CR}} \tag{15}$$

or

$$(I_0)_{\mathrm{UC}} = \frac{\Gamma \sigma_{\mathrm{x}}{}^2 v V}{4 f \sigma_{\mathrm{d}} \sigma_{\mathrm{B}}{}^2 L^2}. \tag{16}$$

Distinguishing between the cross-sections for dissociation on ions and on neutrals, $\sigma_{\mathrm{B}}{}^+$ and $\sigma_{\mathrm{B}}{}^0$, leads to the replacement of $\sigma_{\mathrm{B}}{}^2$ by $\sigma_{\mathrm{B}}{}^+ \sigma_{\mathrm{B}}{}^0$. Strictly speaking, $\sigma_{\mathrm{B}}{}^+$ should be replaced by $\overline{\sigma_{\mathrm{B}}{}^+ v_{\mathrm{r}}}/v$ where v_{r} is the relative velocity between molecular ions and trapped protons and the bar indicates an average over angle and, possibly, energy. At present, probably the best estimate of this quantity would make use of a calculated cross-section given by ALSMILLER [14]. Eq. (16) has been given by BINEAU *et al.* [8].

We note in passing that

$$(\overline{n}_{00})_{\mathrm{UC}} = (n_{+0})_{\mathrm{UC}}. \tag{17}$$

2.5 BETTER FORMULAS

Correcting for C_{c} gives to the next order for I_{UC}:

$$(I_1)_{\mathrm{UC}} = (I_0)_{\mathrm{UC}} \left[1 - \frac{\Gamma v \sigma_{\mathrm{x}} \overline{l}}{2 f v_0 \sigma_{\mathrm{B}} L}\right]. \tag{18}$$

The correction term is a measure of the extent to which burnout, defined [3] as the reduction of $\overline{n}_0$ relative to n_0, has proceeded. For DCX-2 parameters, the correction is modest. The notion that the phenomenon of burnout is necessary for the formation of an S-curve is incorrect.

For the somewhat special DCX-2 parameters, the high-current end of the S-curve is well described by Eq. (13). Extrapolation toward larger L or smaller V, which leads to lower critical densities and currents, requires the use of a better expression for $\overline{n}_0$. To the next order, it becomes

$$\overline{n}_{01} = \overline{n}_{00} \frac{1 + (\theta_0 N_0 / \Gamma I)}{1 + (\theta_0 / \theta_+)} \equiv \gamma \overline{n}_{00}. \tag{19}$$

The resulting analogue to Eq. (13) is:

$$n_+{}^2 - \gamma (n_{+0})_{\mathrm{CR}} n_+ = -\frac{\gamma \Gamma I}{f \sigma_{\mathrm{d}} v V} \tag{20}$$

from which, to first order:

$$(n_{+1})_{\mathrm{UC}} = \gamma (n_{+0})_{\mathrm{UC}} \tag{21}$$

$$(I_1)_{\mathrm{UC}} = \gamma (I_0)_{\mathrm{UC}}. \tag{22}$$

In case either the numerator or denominator of the expression for γ, Eq. (19), differs appreciably from unity, it is necessary to substitute explicitly for γ in Eq. (20) and to find I_{UC} from the condition $dI/dn_+ = 0$. There results a cubic expression for I_{UC} whose solution should agree quite well with the exact value. The only approximations which enter into it are neglect of $1/\tau_+$ and of $n_{\mathrm{c}}/\overline{n}_0$. The expression is:

$$(\Gamma I)^2 (\Gamma I + \theta_0 N_0) - \Gamma (I_0)_{\mathrm{UC}} \left[\left(1 - \frac{\theta_0 \sigma_{\mathrm{B}} L}{\Gamma \sigma_{\mathrm{x}} v V}\right) \Gamma I + \theta_0 N_0\right]^2 = 0. \tag{23}$$

Where $\theta_0 \sigma_{\mathrm{B}} L / \Gamma \sigma_{\mathrm{x}} v V \ll 1$, a quadratic form results which gives:

$$\Gamma I = \frac{1}{2} \Gamma I_0 \left\{1 + \sqrt{1 + \frac{4 \theta_0 N_0}{\Gamma I_0}}\right\} \tag{24a}$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma I_0 + \sqrt{\theta_0 N_0 \Gamma I_0} \sqrt{1 + \frac{\Gamma I_0}{4 \theta_0 N_0}}. \tag{24b}$$

The combination of Eqs. (19) and (20) gives a form which is quadratic in n_+ for a given I and which accurately describes the entire lower half of the S-curve.

Further complication arises when the residual background gas differs from that brought in by the beam. Using a subscript r to denote quantities appropriate to the residual gas and o those appropriate to hydrogen, the first-order corrected $(n_+)_{\mathrm{UC}}$ and I_{UC} corresponding to Eqs. (21) and (22) are

$$(n_{+1})_{\mathrm{UC}} = (n_{+0})_{\mathrm{UC}} \left[1 + \frac{\theta_{\mathrm{r}} N_{\mathrm{r}}}{\Gamma (I_0)_{\mathrm{UC}}} \frac{\sigma_{\mathrm{xr}} \sigma_{\mathrm{do}} f_0}{\sigma_{\mathrm{xo}} \sigma_{\mathrm{dr}} f_{\mathrm{r}}}\right] \tag{25}$$

$$(I_1)_{\mathrm{UC}} = (I_0)_{\mathrm{UC}} \frac{\left[1 + \dfrac{\theta_{\mathrm{r}} N_{\mathrm{r}}}{\Gamma (I_0)_{\mathrm{UC}}} \dfrac{\sigma_{\mathrm{xr}}}{\sigma_{\mathrm{xo}}} \dfrac{\sigma_{\mathrm{do}}}{\sigma_{\mathrm{dr}}} \dfrac{f_0}{f_{\mathrm{r}}}\right]^2}{\left[1 + \dfrac{\theta_{\mathrm{r}} N_{\mathrm{r}}}{\Gamma (I_0)_{\mathrm{UC}}} \dfrac{\sigma_{\mathrm{Br}}}{\sigma_{\mathrm{Bo}}} \dfrac{\sigma_{\mathrm{do}}}{\sigma_{\mathrm{dr}}} \dfrac{f_0}{f_{\mathrm{r}}}\right]}. \tag{26}$$

A nearly exact expression for $(I)_{\mathrm{UC}}$ neglecting only θ_{r}, C_{c}, and $1/\tau_+$ is the solution of a cubic equation in I_+. In the limit of large residual gas effects,

$$\Gamma (I_0')_{\mathrm{UC}} = \left[\theta_{\mathrm{r}} N_{\mathrm{r}} \, \Gamma (I_0)_{\mathrm{UC}} \frac{\sigma_{\mathrm{xr}}{}^2 \sigma_{\mathrm{Bo}} \sigma_{\mathrm{do}} f_0}{\sigma_{\mathrm{xo}}{}^2 \sigma_{\mathrm{Br}} \sigma_{\mathrm{dr}} f_{\mathrm{r}}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

$$(I_1')_{\mathrm{UC}} = (I_0')_{\mathrm{UC}} \frac{\left[1 + \dfrac{\Gamma I_0'}{\theta_{\mathrm{r}} N_{\mathrm{r}}} \dfrac{\sigma_{\mathrm{xo}} \sigma_{\mathrm{dr}} f_{\mathrm{r}}}{\sigma_{\mathrm{xr}} \sigma_{\mathrm{do}} f_0}\right]}{\left[1 + \dfrac{\Gamma I_0'}{\theta_{\mathrm{r}} N_{\mathrm{r}}} \dfrac{\sigma_{\mathrm{Bo}} \sigma_{\mathrm{dr}} f_{\mathrm{r}}}{\sigma_{\mathrm{Br}} \sigma_{\mathrm{do}} f_0}\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{28}$$

2.6 APPROXIMATE FORMULAS; LOWER CRITICAL CURRENT

In the region of the lower critical current, $\theta_0 \ll \theta_+$ and $\overline{n}_0 + n_{\mathrm{c}} \ll n_+$; however, $\theta_0 N_0$ and $1/\tau_+$ are significant. The balance equations becomes

$$n_+{}^2 - \frac{I}{V} \frac{\sigma_{\mathrm{B}} L}{\sigma_{\mathrm{c}} v P} n_+ = -\frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{f \sigma_{\mathrm{d}} \sigma_{\mathrm{c}} v P V} (\Gamma I + \theta_0 N_0). \tag{29}$$

This expression describes the upper half of the S-curve with good accuracy.

For $\theta N_0 \gg \Gamma I$, the lower critical current, defined by $dI/dn_+ = 0$, is given to first order by

$$(I_0)_{\mathrm{LC}} = \left[\frac{4 \sigma_{\mathrm{x}} \sigma_{\mathrm{c}} v P V \theta_0 N_0}{f \sigma_{\mathrm{d}} \sigma_{\mathrm{B}}{}^2 L^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{30 a}$$

$$= \left[\frac{16 \sigma_{\mathrm{c}} P}{\Gamma \sigma_{\mathrm{x}}} \theta_0 N_0 \Gamma (I_0)_{\mathrm{UC}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{30 b}$$

To second order

$$(I_1)_{\mathrm{LC}} = (I_0)_{\mathrm{LC}} \left\{ \frac{\Gamma (I_0)_{\mathrm{LC}}}{2\theta_0 N_0} + \left[1 + \left(\frac{\Gamma (I_0)_{\mathrm{LC}}}{2\theta_0 N_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (31)$$

The extension to heavy residual gas evidently involves σ_{xr}, f_{r}, and σ_{dr} in Eq. (30a) and the appropriate ratios in Eq. (31).

3. Extensions

3.1 TIME DEPENDENCE OF BUILD-UP

The first-order approximations readily lend themselves to rough estimates of the time constant for density build-up near critical points. The procedure consists of setting the sum of the terms of an approximate balance equation (e.g. Eq. (11), multiplied by $I\sigma_{\mathrm{B}} L/V$) equal to dn_+/dt. Thus, near the critical density Eq. (11) becomes

$$\frac{dn_+}{dt} = \frac{I}{V}\left[n_+ \sigma_{\mathrm{B}} L - \frac{\Gamma\sigma_{\mathrm{x}}}{f\sigma_{\mathrm{d}}}\right] \quad (32\,\mathrm{a})$$

$$= (I/V)\sigma_{\mathrm{B}} L[n_+ - (n_{+0})_{\mathrm{CR}}] \quad (32\,\mathrm{b})$$

from which

$$n_+ - (n_{+0})_{\mathrm{CR}} = [n_+ (t = 0) - (n_{+0})_{\mathrm{CR}}] \exp (+ I\sigma_{\mathrm{B}}\, Lt/V). \quad (33)$$

That is, the time constant is just the time for the ion density to increase by a factor e by trapping on itself.

Near the upper critical current we write an analogue of Eq. (13):

$$\frac{dn_+}{dt} = \frac{I}{V} n_+ \sigma_{\mathrm{B}} L + \frac{\Gamma I^2 \sigma_{\mathrm{B}} L}{n_+ f\sigma_{\mathrm{d}} v V^2} - \frac{I}{V}\frac{\Gamma\sigma_{\mathrm{x}}}{f\sigma_{\mathrm{d}}}. \quad (34)$$

This expression is based on the assumption that the neutral atom density comes into equilibrium with the ion density in a time much shorter than the ion-density time constant. The neutral time constant is equal to the chamber volume divided by the total pumping speed exhausting the chamber. For DCX-2 parameters, it is of the order of tens of milliseconds, while the ion-density time constant is of the order of seconds. The assumption is thus well justified.

Eq. (34) is readily integrable. However, it is more instructive to determine the value of $(1/n_+)\, dn_+/dt$ (the instantaneous fractional build-up rate) at the density for which it is a minimum. Straightforward algebra gives

$$n_+(\tau_{\max}) = 2\,\frac{I}{V}\frac{\sigma_{\mathrm{B}} L}{\sigma_{\mathrm{x}} v} \quad (35)$$

$$(\tau_{\max})^{-1} = [I - (I_0)_{\mathrm{UC}}](\sigma_{\mathrm{B}} L/V)\,, \quad (36)$$

once again a result almost evident from first principles.

3.2 ARC TRAPPING

One possible route to a high-density plasma consists of using an arc or other trapping plasma to achieve a critical density as described in the previous sections. It is now recognized that particle losses associated with the arc itself may set an upper limit to the density, so subsequent removal of the arc would be essential to burnout and the realization of a mirror-loss-limited density. As was pointed out by Simon, superposition of an arc-determined curve of $n_+ (I)$ with an S-curve indicates the input current necessary to attain the critical density. Once this point is reached, the arc density may be reduced at an arbitrary rate, and plasma build-up will ensue.

A closer study of the details of plasma-density variation as the arc density is changed shows possible advantages which have not previously been realized. The analysis proceeds by adding, in Eq. (1), an arc-capture term

$$C_{\mathrm{a}} = n_{\mathrm{a}}\, \sigma_{\mathrm{Ba}}\, L_{\mathrm{a}} = n_{\mathrm{a}}\, (\sigma_{\mathrm{Ba}}\, L_{\mathrm{a}}/L)\, L \quad (37)$$

and an arc-loss term, $1/\tau_{\mathrm{a}}$, assumed proportional to arc density n_{a}. Representative of the carbon arcs used in DCX-1 are a density of 10^{14} ions/cm^3, a loss time-constant of 10^{-2} sec., (implying $1/\tau_{\mathrm{a}} = 10^{-12}\, n_{\mathrm{a}}$) and $(\sigma_{\mathrm{Ba}}\, L_{\mathrm{a}}/L) = 8 \times 10^{-17}$ cm^2.

Immediately noticeable is that the capture efficiency of the arc, for $L = 10$ meters, is 8/9, compared with a plasma capture efficiency of 4×10^{-3} for $n_+ = 10^{11}$ cm^{-3}. The plasma density determined by a DCX-1 arc is thus given by

$$\frac{I}{V} \cdot \frac{C_{\mathrm{a}}}{1 + C_{\mathrm{a}}} = n_+ \cdot \frac{1}{\tau_{\mathrm{a}}} \quad (38)$$

$$n_+ = \frac{I}{V}\frac{C_{\mathrm{a}}\,\tau_{\mathrm{a}}}{1 + C_{\mathrm{a}}}\,. \quad (39)$$

The product $C_{\mathrm{a}}\,\tau_{\mathrm{a}}$ is independent of arc density. The effect of reducing arc density, then, is to reduce the value of the denominator, $1 + C_{\mathrm{a}}$, from 9 to 1. That is, if the arc density is reduced slowly enough for the plasma density to maintain an equilibrium with it, the eventual achievement of a given plasma density will require only one-ninth the input beam current required for a full-density carbon arc. Alternatively, the same results may be achieved by operation from the beginning with an arc whose density is about 1% of that of the carbon arc.

An approximate expression for $n_+ (I)$ follows from a version of Eq. (1) which includes arc terms but ignores $1/\tau^+$, C_0, and C_{c}. The mean neutral density is given by Eq. (19), ignoring θ_0/θ_+. For the low arc-density regime ($C_{\mathrm{a}} \ll 1$), the result is:

$$n_+ = \frac{\dfrac{I}{V}\left(\dfrac{\Gamma\sigma_{\mathrm{x}}}{f\sigma_{\mathrm{d}}} - C_{\mathrm{a}}\right) + \dfrac{\sigma_{\mathrm{x}}\,\theta_0\, N_0}{f\sigma_{\mathrm{d}} V}}{(I/V)\,\sigma_{\mathrm{B}}\, L - (1/\tau_{\mathrm{a}})}\,. \quad (40)$$

Figure 2 shows plots of $n_+(I)$ for various values of n_{a}. For $C_{\mathrm{a}} \ll 1$, the transition from an arc-dominated plasma to an S-curve relationship is seen to involve a monotonic variation of n_+ with n_{a}, the sense depending on whether a critical current is exceeded. For $n_{\mathrm{a}} \leqslant 10^9$ cm^{-3}, the $n_+ (I)$ curve follows the exact $L = 10$ m curve of Fig. 1 within 10% in the range 10 ma $\leqslant I \leqslant$ 300 ma, $10^{11} \leqslant n_+ \leqslant 4 \times 10^{11}$ cm^{-3}.

The critical arc density n_{ac}, below which an S-curve forms, is that for which $dI/dn_+ = 0$ at the critical current I_{c}:

$$10^{-12}\, n_{\mathrm{ac}} = \frac{1}{\tau_{\mathrm{ac}}} = \frac{I_{\mathrm{c}}}{V}\,\sigma_{\mathrm{B}}\, L\,. \quad (41)$$

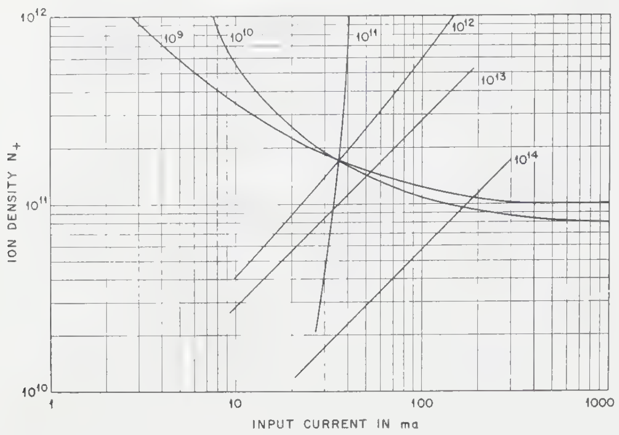

Fig. 2 Plot of equilibrium ion density versus input current for various trapping-arc densities. Curves are labeled by arc densities in ions per cm³.

That is, the critical arc density is that density for which the arc loss rate is less than the filling rate by dissociation on trapped ions. From Fig. 2, $n_{+c} = 1.7 \times 10^{11}$ cm^{-3} and $I_c = 36$ ma; thus $n_{ac} = 9 \times 10^{10}$ cm^{-3}.

This low critical arc density is quite significent for (two-body) energy loss considerations. Since the arc's density at this point is comparable to the plasma density, and since the arc occupies only a few percent of the plasma volume, the arc electrons should play a negligible role in reducing the energy of the trapped protons. Thus, an extremely cold trapping plasma can be tolerated if its σ_{Ba} is as great as that of the carbon arc.

For $n_a = n_{ac}$, the numerator of Eq. (40) must equal zero; this gives, approximately and then exactly:

$$I_{c0} = \frac{\Gamma \sigma_x V}{2 f \sigma_d \sigma_B L C_a \tau_a} \tag{42}$$

$$I_{c1} = \frac{1}{2} I_{c0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \theta_0 N_0}{\Gamma I_{c0}}}\right). \tag{43}$$

It is revealing to express $1/\tau_a$ in the form $n_a \sigma_{La} v$, where σ_{La} is an effective loss cross-section averaged over the plasma volume. Then Eq. (42) becomes

$$I_{c0} = \frac{\Gamma \sigma_x \sigma_{La} v V}{2 f \sigma_d \sigma_B L \sigma_{Ba} L_a}. \tag{44}$$

The form is remarkably similar to that of the upper critical current, Eq. (16).

Combining Eqs. (41) and (42):

$$C_a = n_a \sigma_{Ba} L_a = \frac{\Gamma \sigma_x}{2 f \sigma_d}. \tag{45}$$

3.3 Ogra

An approximate formula for the upper critical current in OGRA has been given in the survey article by Kurchatov [2]:

$$(I)_{UC} = \frac{\sigma_x V v}{4 \sigma_B^2 L^2} \tag{46}$$

Our expression, Eq. (16), differs by a factor $\Gamma \sigma_x / f \sigma_d$, which turns out to be just equal to the equilibrium trapping efficiency if $1/\tau_+$ is neglected and $\bar{n}_0$ is given by Eq. (9). (This factor appears significantly in Eqs. (40) and (45).) Its value (with $\Gamma = 2$, $f = 1$) at the relevant proton energy (100 keV) is 0.2 or 0.06 depending on the choice of σ_x. The two measured values of σ_x at 100 kev differ [2], [13], by a factor of 4, implying a factor of 16 discrepancy in $(I_0)_{UC}$. Actually, for the lower cross-section, a better approximation Eq. (24b) must be used for $(I_0)_{UC}$ and the two values are not quite so far apart. A former discrepancy in σ_B, which amounted [4] to a factor of 2.5, has been partly reduced by two recent measurements, Sweetman [15] and Postma [11], which agree on an intermediate value: 9×10^{-17} cm². Using the other parameters chosen by Simon [4], the high and low values of $(I)_{UC}$ are 600 ma and 70 ma.

If nitrogen is chosen as the background gas (initial pressure 10^{-7} mm Hg; $\theta_0 = 40{,}000$ l/sec) the lower figure becomes about 100 ma. The most likely impurities in a moderately clean system (CO, CH_4) are apt to have comparable cross-sections. With the large assumed pumping speed this represents a 25 ma-equivalent gas input and is an unrealistically high value, probably by an order of magnitude. Since cold heavy ions can also serve as charge exchange centers, a good first approximation to including their effects would be to neglect burnout for them; i.e. to make the charge exchange contribution of the heavy gas proportional to its density external to the plasma.

3.4 Role of the electrons

Without interpretation, the formulas given above do not include the effects of energy exchange in the plasma. It has been pointed out by Rose [16], Fowler [17], Lazar [18], that where this is a significant factor, the most important correction consists of replacing the lifetime τ by an average over the energy of the trapped particles, $\bar{\tau}$. The corrected treatment of σ_B has already been mentioned (Sec. 3). If the main effect is energy loss to electrons, if energy dispersion is insignificant, and if charge exchange is the dominant loss mechanism, Rose [16] gives:

$$\tau_0 = \int_0^\infty dt \exp\left[-\int_0^t dt'/\tau_0\right] \tag{47 a}$$

$$= \frac{1}{n_e} \int_{E_c}^{E_0} (dE/\varepsilon) \exp\left[-\frac{\bar{n}_0}{n_e} \int_E^{E_0} \sigma_x v \, dE/\varepsilon\right] \tag{47 b}$$

in which t is time measured from a particle's injection; n_e is the electron density, equal to $n_+ + n_c$; E is instantaneous proton energy; E_0 is injection energy; E_c is a cut-off energy, at which the argument of the exponential goes to infinity; and ε is a proton's rate of energy loss per electron. Factors in the integrands are functions of the variable of integration.

For a Maxwellian electron velocity distribution, ε is described by the Chandrasekhar formula, see

SPITZER [19]. The integration has been performed by ROSE [16], for several fixed electron temperatures, such as would be encountered with initial arc trapping. It was remarked above (Sec. 3.2) that the critical carbon-arc density would be sufficiently low that energy losses in it would not be significant. For an arc with a much smaller dissociation cross-section and thus a higher critical density, this might not be the case.

FOWLER [17] has performed a self-consistent energy-loss calculation. His assumptions were an electron throughput equal to the rate of gas ionization and a plasma potential whose depth for electrons is equal to the electrons' mean energy. His results were as follows: For $L = 20$ m in DCX-2, there results an electron temperature (T_e) of about 100 eV. The hot electrons are roughly as effective as the protons in ionizing the background gas, approximately doubling the effective σ_d. The final result is an upper critical current of 600 ma and a lower critical current of 150 ma. The last figure appears to set a lower limit on the critical current for plasma build-up using initial arc trapping. A smaller but still significant effect is the electron contribution to molecular-ion dissociation.

Since a large fraction of the electron velocities are less than the ion velocity at $T_e = 100$ ev, it would seem unlikely that the energy loss rate would be highly sensitive to departures from a Maxwellian electron energy distribution. However, KILLEEN and HECKROTTE [20], using numerical analysis of Fokker-Planck equations do find a reduced transfer rate.

4. Notation

The following tabulation lists the basic definitions for the symbols used in the paper.

Basic symbols

C	"efficiency" of a given capture (dissociation) process, see Eqs. (2), (3), (37); used with subscripts +, 0, c, a
C_i	generalized C; $\sum C_i = C_+ + C_0 + C_c$
E, E_0, E_c	instantaneous proton energy, injection energy, cut-off energy, respectively; see Eq. (47)
f	fraction of cold ions permanently removed from the system; also used with the subscripts 0, r
I	molecular ion current; also used with the subscripts CR, LC, UC
I_0, I_1	first and second approximations to I, see Eq. (18)
I_c	critical current, see Eq. (41)
$\bar{l}$	mean chord length of plasma volume (four times ratio of plasma volume to surface area)
L	mean free path of molecular ions through the plasma in the absence of trapping; also used with subscript a, see Eq. (37)
n	gas (atom) density; used with subscripts +, 0, c and additional subscripts 0,1
n_0	average internal neutral gas (atom) density
$\hat{n}_0$	external neutral gas (atom) density
n_a	trapping arc density, see Eq. (37)
n_{ac}	critical arc density
N_0	density of neutrals in the absence of beam or plasma
N_r	density of neutrals in residual background gas, see Eq. (25)
P	fraction of a sphere subtended by mirror loss-cone
t	time
T_e	electron temperature
v	proton velocity
v_r	relative velocity between molecular ions and trapped protons, see discussion following Eq. (16)
V	volume of plasma
γ	ratio of second to first approximations for the internal neutral gas (atom) density, see Eq. (19)
Γ	a constant, see Eq. (8)
ε	proton's rate of energy loss per electron
θ_+	pumping speed of the plasma considered as a vacuum pump
θ_0	pumping speed of other pumps in system
σ_B	dissociation cross-section; also used with additional subscripts 0, r
σ_c	effective Coulomb cross-section for 90° scattering
σ_d	cross-section for "destruction" of a neutral (sum of ionization and charge exchange cross-sections); also used with additional subscripts 0, r
σ_{La}	effective loss cross-section averaged over plasma volume, see Eq. (44)
σ_x	charge-exchange cross-section; also used with additional subscripts 0, r
τ	lifetime for a given loss process; also used with subscripts +, 0, see end of Section 2.3 and with subscript a, see Eq. (37)
$\bar{\tau}$	lifetime averaged over energy of trapped particles

Subscripts

+,0,c	used to refer to process involving trapped ions (+), background gas (0), and cold ions formed by ionization of background gas (c), respectively
0, r	used to distinguish residual background gases (i.e. residual gas and that brought in by the beam); 0 refers to hydrogen, r to other background gas, see Eq. (25)
0,1	subscript added to denote degree of approximation; thus first and second approximations of n_+ are n_{+0} and n_{+1} respectively; see, for example, Eqs. (9), (18)
a	refers to arc-capture process, see Eq. (37)
CR	refers to critical region, i.e. the unstable region of S-curve, see Eq. (12)
LC	refers to lower critical current
UC	refers to upper critical current

Superscripts

$+,0$ used to distinguish between dissociation on ions and on neutrals, see e.g. discussion following Eq. (16)

Acknowledgements

The author is indebted, for helpful discussions, to T. K. Fowler, P. R. Bell, D. J. Rose, E. D. Shipley, and A. Simon. G. G. Kelley and N. H. Lazar participated in the time-dependent calculations.

References

[1] Barnett, C. F., et al. *Proc. Second UN Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy* **31** (1958) 298.
[2] Kurchatov, I. V., *J. Nucl. Energy* **8** (1958) 168.
[3] Simon, A., *Phys. Fluids* **1** (1958) 495.
[4] Simon, A., *J. Nucl. Energy* C **1** (1960) 215.
[5] Gibson, G., Lamb, W. A. S. and Lauer, E. J., *Phys. Rev.* **114** (1959) 937.
[6] Damm, C. C., Post, R. F. and Futch, A., *Proc. 4th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala* **II** (1959) 988.
[7] Gilbert, F. C., Heckrotte, W., Hester, R. E., Killeen, J. and Van Atta, C. M., *High-Energy Molecular Ion Injection Into a Mirror Machine* UCRL-5827 (1959).
[8] Bineau, M., Consoli, T., Maisonnier, Ch., Prevot, F. and Ricateau, P., *Nuclear Instrum.* **4** (1959) 290.
[9] Luce, J. S., *Proc. Second UN Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy* **31** (1958) 305.
[10] Simon, A., *Phys. Fluids* **2** (1959) 336.
[11] Postma, H. and Hamblen, D. P., Private Communication (1960).
[12] Mott, N. F. and Massey, H. W., *The Theory of Atomic Collisions* (Oxford University Press, 2nd Ed. 1949) p. 247.
[13] Barnett, C. F., and Reynolds, H. K., *Phys. Rev.* **109** (1958) 355.
[14] Alsmiller, R. G., Jr. *Cross Sections for the Distribution of* H_2^+ *and* D_2^+ *by a Vacuum Carbon Arc.* ORNL-2766 (1959).
[15] Sweetman, D. R., *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A256** (1960) 416.
[16] Rose, D. J., *Ion Energy Distribution in a Plasma Formed by Beam Trapping*, ORNL-CF-60-9-112 (1960).
[17] Fowler, T. K., *Effect of Energy Degradation on the Critical Current in an OGRA-Type Device*, ORNL-3037 (1960).
[18] Lazar, N. H., Private communication (1960).
[19] Spitzer, L. Jr. Physics of Fully Ionized Gases (Interscience Publishers, New York 1956).
[20] Killeen, J. and Heckrotte, W., *Bull. Am. Phys. Soc.* **5** (1960) 372 Paper U11.
[21] Prevot, F. and Gourdon, C. *Evolution d'un plasma par injection d'ions—courant critique*, Euratom-CEA Fusion rapport interne N° 80 (1961).

(Manuscript received on 9 December 1960)

THE DAMPING OF RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITIES IN A THETATRON DISCHARGE

H. A. B. Bodin, A. A. Newton and N. J. Peacock

A.W.R.E., Aldermaston, Berkshire, England

A high-speed framing camera has been used to photograph deuterium and helium discharges in which flute instabilities are driven by the inertial force of a radial acceleration. The wavelength of the instability increases with decreasing initial pressure, suggesting the damping effect of viscosity; in some cases this damping apparently prevents the growth of flutes entirely. A simple theory of viscous damping is in qualitative agreement with the observations. An instability due to the radial acceleration accompanying a rotation of the plasma appears at about peak field.

1. Introduction

Recently Green and Niblett [1] have discussed the observation of the Rayleigh-Taylor instability in a magnetic field-plasma interface in thetatron discharges. The temperatures were about 6 eV where resistive damping was operative; the present paper describes observations at higher temperatures achieved in much more powerful discharges [2] where viscous damping of the instability is predicted. A similar type of instability in the linear *Z*-pinch has been reported by Latham *et al.* [3].

The thetatron discharge is produced by applying a rapidly rising axial magnetic field (generated by a single-turn coil) to a gas, which breaks down at times when the magnetic field is close to zero (peak electric field). A discharge, which can therefore be initiated at the first or subsequent current zeros, begins with an implosion which excites radial oscillations that decay as the gas is further compressed. The instability, which occurs with like and reversed trapped field, takes the form of approximately uniformly spaced flutes in the cylindrical plasma surface which develop radially whilst the plasma is accelerated. When the acceleration ceases, the smaller flutes stop growing and the larger ones continue with constant velocity to the tube wall, where they cause local regions of intense luminosity. Flutes are observed to grow during the implosion phase and, at higher initial gas pressures, during the oscillations phase. The acceleration and also the wavelength and growth-time of the flutes are usually different in the two phases of one discharge. In some discharges the plasma is observed to rotate about its axis of cylindrical symmetry as peak magnetic field is approached and flutes are also found to grow during this rotation.

2. Theory*

The growth of the instability is given by

$$A_1 = A_0 \exp{(t/\tau)}, \tag{1}$$

where A_0 is the amplitude of a flute growing to A_1 in a time t. The e-folding time, τ, is related to the acceleration, a, and the wavelength λ by

$$(2\pi/\lambda)\, a\, \tau^2 = 1. \tag{2}$$

It is assumed that the medium is infinite, bounded by a region of zero density, (the external magnetic field) and the disturbances A_0, A_1 are small compared to their distance apart or wavelength, λ. The growth of the instabilities may be damped either by resistive diffusion of magnetic field into the plasma or by viscosity. The effect of damping is to put a lower limit to the wavelength of the fastest growing instability, this being the "wavelength of maximum instability", λ_m. For viscous damping λ_m is found by equating τ to the characteristic time for the transport of momentum across a distance equal to a wavelength,

$$\tau = \left(a\,\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} = \nu^{-1}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-2},$$

where ν is the kinematic viscosity. Thus λ_m is given by

$$\lambda_\mathrm{m} = 2\pi a^{-\frac{1}{3}}\, \nu^{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

The viscosity of a fully ionised plasma in the absence of a magnetic field has been given by Marshall [4]

$$\nu = \frac{5}{8\,\pi^{\frac{1}{2}}}\;\frac{(k\,T_\mathrm{i})^{\frac{5}{2}}}{n\,m_\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}\,e^4 \ln \Lambda},$$

where T_i is the ion temperature, m_i the ion mass, e the electron charge, m the density, k is Boltzmann's constant and Λ is a collision integral tabulated by Spitzer [5].

For deuterium

$$\nu = \frac{1.6\times 10^{19}\, T_\mathrm{i}^{\frac{5}{2}}}{n \ln \Lambda}\ \text{(c.g.s.)} \tag{4}$$

where T_i is in electron-volts, and one obtains:

$$\lambda_\mathrm{m} \propto \frac{T_\mathrm{i}^{\frac{5}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} \tag{5}$$

which increases with temperature.

---

* See discussion in reference [1].

This simple theory only applies when (a) the ion mean free path is less than a wavelength and (b) the ion collision time, τ_2, is less than the growth-time of the flutes. The effect of the magnetic field on the viscosity is not taken into account, an approximation which is valid if the ion collision time is smaller than the ion cyclotron period.

3. Apparatus and measurement

The experiments were performed on the "Maggi I" low-inductance capacitor bank of $100\,\mu$F operating at 20 kV with a period of about $10\,\mu$ sec. Details of the bank have been given by Fitch and McCormick [6]. The bank was coupled either to a straight coil 21 cm long, 6.6 cm internal diameter or to a mirror coil of the same length and internal diameter with a geometrical mirror ratio of 1.44. The discharge tube was of transparent quartz 4.4 cm internal diameter and the discharge was photographed axially through a plate glass window by a high speed framing camera. The camera took 30 successive pictures and was run at a rate of between 3 and 7×10^6 pictures per second. The acceleration and growth-time were measured by comparing successive pictures, and the wavelength was found by dividing the plasma outer circumference by the number of flutes counted at the earliest time they were visible. It is assumed that the observed λ is λ_m although λ may be less than λ_m, since an upper limit is set by the plasma circumference, the largest possible wavelength being 13.8 cm, the internal circumference of the tube.

4. Results

Table I shows seven examples in D_2 of instability during implosion and four during oscillations (three in D_2 and one in He). Four examples of stability where oscillations are present are noted with the upper limit of the observable wavelength, that is, the plasma circumference. It is known that all the gas is swept up during the implosion [2] so that the density, n, can be calculated and used to find a lower limit of the temperature from Eqs. (3) and (4).

Figure 1 shows framing camera sequences corresponding to examples 4, 4a, 6, 6a, 7 and 7a showing typical features of the instability at three different pressures. It is seen that at $300\,\mu$ Hg, instability is very prominent and of relatively short wavelength. At $150\,\mu$ the wavelength is longer and the instability

TABLE I. Instabilities in Implosion and Oscillation Phases†

Implosion Phase	Mirror Coil				Straight Coil			
Example number	1	2	3	4	5	6	7	8
Gas	Deuterium							Helium
Initial Pressure (μ Hg)	50	78	100	150	300	80	300	300
Camera Pictures/second	5×10^6					3×10^6	7×10^6	5×10^6
Acceleration a, 10^{13} cm sec^{-2}	1.8	4.0	2.6	1.5	1.4	2.0	4.2	
Wavelength λ_m, cm	3.5	6.1	3.4	1.6	0.95	2.0	1.0	
Growth time τ, 10^{-7} sec	2.2	*	*	1.35	1.0	3.5	1.3	
$(2\pi/\lambda_m)\, a\, \tau^2$	1.6			1.05	0.95	0.8	7.4	
Ion density at instability, 10^{15} ions/cc	6.8	17	21	64	44	44	31	
Temperature from viscosity, eV	40	97	67	59	37	58	40	
Oscillation Phase								
Example No.	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a
Acceleration a, 10^{13} cm sec^{-2}	**	**	**	0.5	1.1	**	1.7	5.6
Wavelength λ_m, cm	>3.5	>4.5	>3.5	1.0	0.5	>4.5	0.55	0.8
Growth time τ, 10^{-7} sec				1.33	4.0		4.2	1.8
$(2\pi/\lambda_m)\, a\, \tau^2$				0.60	22		35	1.3
Density at instability, 10^{15} ions/cc	87	60	143	162	302	60	714	***
Temperature from viscosity, eV	>95	>100	>115	52	51	>100	88	

† The values of a, λ, t and the number density are averages over the whole period of the inward acceleration.

* Inadequate number of frames for a measurement.

** No instability visible. The maximum wavelength possible in the discharge is quoted.

*** This is a second-cycle discharge containing unknown amounts of impurity from the walls.

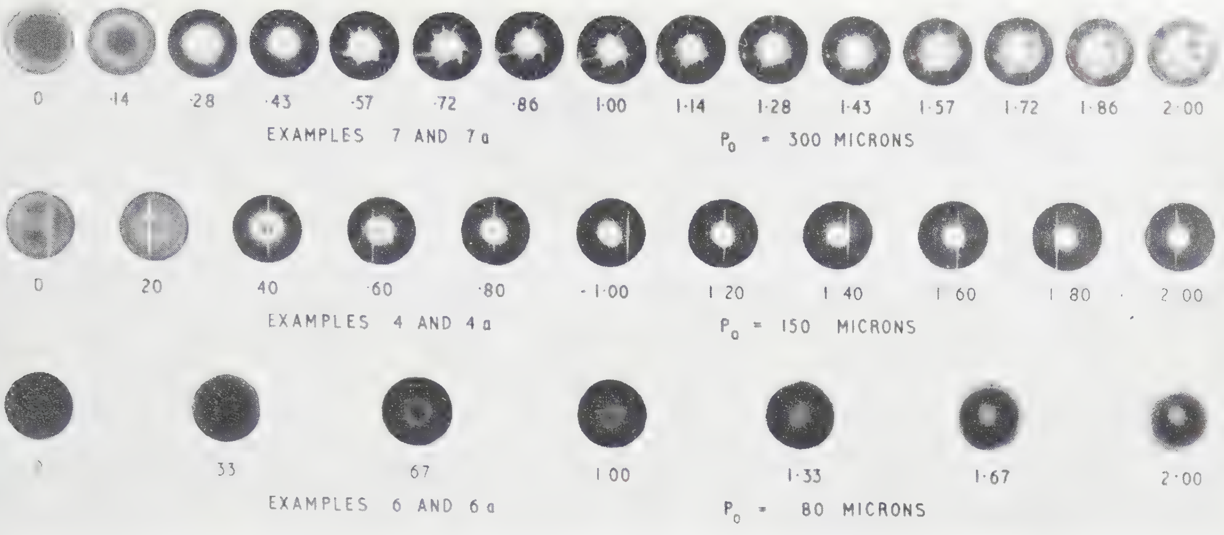

Fig. 1 Framing camera photographs of discharges in deuterium viewed axially. The time in microseconds from the start of the discharge is shown under each photograph.

is much less marked, while at 80 μ Hg the wavelength is still longer and the instability rapidly damped out.

Figure 2 is an axial streak-photograph taken across a diameter, viewing along the axis of a helium discharge at an initial pressure of 300 μ Hg. The instability is seen to grow during the implosion and a jet of plasma strikes the walls during the oscillation phase. In some examples there was a tendency for the largest flutes to grow linearly with time, this being similar to observations during the later stages on gas-liquid interfaces described by Lewis [7].

A discontinuity in the acceleration between examples 1 and 2 occurs because the discharge takes place in the third, rather than the second half-cycle of the bank oscillation; a similar consideration applies to the straight coil, examples 6 and 7, where the transition pressure is higher. Figure 3 shows an example of an instability observed when the plasma is rotating and Table II gives values of the acceleration

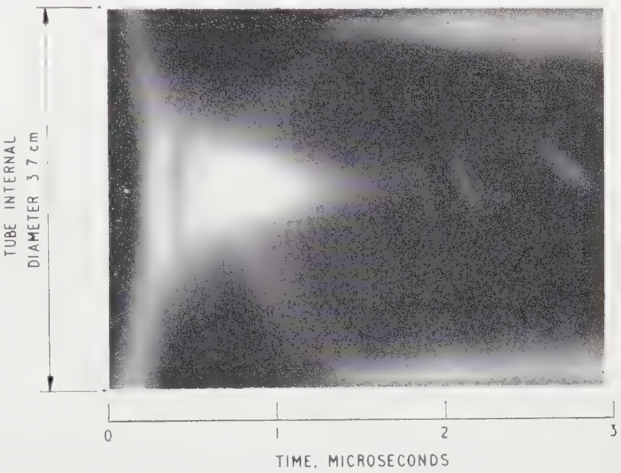

Fig. 2 Axial streak photograph of a helium discharge at 300 microns Hg initial pressure.

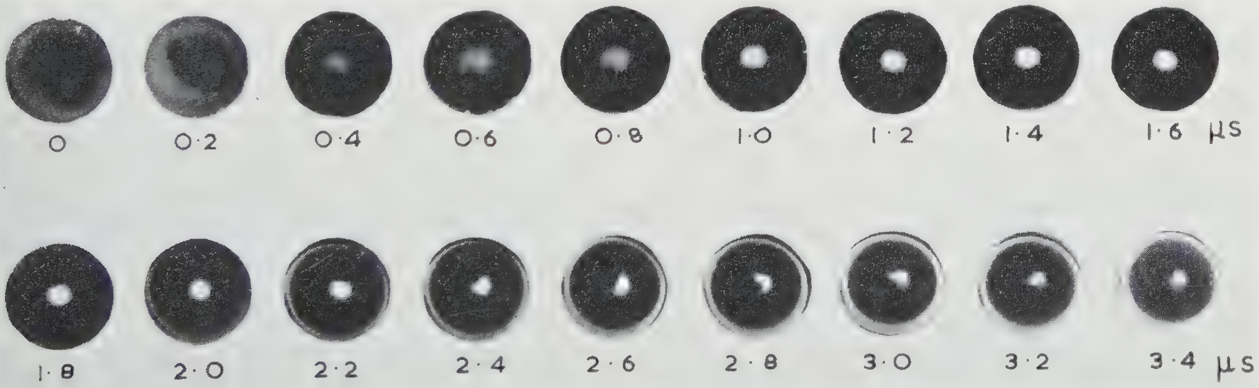

Fig. 3 Axial framing camera photographs showing plasma rotation and the associated instability in deuterium, 100 microns Hg, 20 kilovolts.

(due to the rotation) wavelength and growth time of three examples of this instability, together with values of $(2\pi/\lambda)\, a\, \tau^2$.

TABLE II. Rotation Phase Instabilities†

Example number	3b	9b	10b
Gas	D_2		He
Initial Pressure (μ Hg)	100	95	300
Camera pictures/second	5×10^6	3×10^6	
Acceleration a, 10^{13} cm sec^{-2}	0.8	0.2	0.3
Wavelength λ, cm	0.95	1.1	1.1
Growth-time τ, 10^{-7} sec	2.2	4.0	4.5
$(2\pi/\lambda) a \tau^2$	2.5	1.8	3.5

† The values of a, λ, t and the number density are averages over the period of the inward acceleration.

5. Discussion

5.1 GENERAL DISCUSSION

Table 1 shows eight examples (1, 3a, 4, 4a, 5, 6a, 9b and 10b) which satisfy Eq. (2); $(2\pi/\lambda)\, a\, \tau^2 = 1$ within the limits of experimental error. There are no examples with $(2\pi/\lambda)\, a\, \tau^2 \ll 1$ and four with $(2\pi/\lambda)\, a\, \tau^2 \gg 1$ by amounts exceeding experimental error. A further examination of the results revealed that when $(2\pi/\lambda)\, a\, \tau^2 \sim 1$ then $A_1 \leq r$ and when $(2\pi/\lambda)\, a \tau^2 \gg 1$ then $A_1 \geq r$, or the amplitude of the flute was greater than the plasma radius and the assumption of small amplitudes is violated. The effect of the finite thickness, h, of the plasma [8] which tends to increase τ has been neglected; when $\lambda \overset{\sim}{>} h/3$ and the plasma is hollow, this becomes important. The appearance of the instability, pointed flutes separated by rounded troughs, is the same in all cases during the implosion and oscillation phases (not dependent on the type of coil) and it is likely that they are all due to Rayleigh-Taylor inertial forces.

From Table II it is seen that $(2\pi/\lambda)\, a \tau^2 \sim 1$ for the instabilities during the rotation phase and so these instabilities, even although of slightly different appearance to the others, can be interpreted as due to inertial forces arising from the rotation.

5.2 DAMPING

In order to compare the results with the prediction of theory, which indicates that $\lambda \to T_i^{5/3}\, n^{-2/3}$, it is necessary to know T_i and n over the pressure range of the experiments. Neither of these have been measured directly, but n can be obtained from the observed compression assuming efficient collection of gas, see [2]. In the thetatron the heating is complicated by the presence of trapped field in the plasma and the temperature/pressure variation is not readily predictable without a knowledge of $\beta = n k T / [(B^2/8\pi) + n k T]$. Although in some relatively small pressure intervals the temperature increases with increasing pressure, over the range of the present experiments the temperature in general increases with decreasing initial pressure. This is shown by direct measurement of the peak electron temperature in deuterium from spectroscopic analysis of O VI/O V at 300 μ Hg ($T_e \sim 20$ eV) and from bremsstrahlung measurements in the soft x-ray region at 100 μ Hg ($T_e \geqq 100$ eV). The relative ion temperatures calculated from the instability, assuming viscous damping and using Eqs. (3) and (4), are also found (see Table I) to increase with decreasing pressure. This, together with the observation that the calculated temperatures are greater during the oscillation phase (when further compression heating is taking place) than in the implosion phase, is consistent with the hypothesis that viscous damping is the predominant mechanism. Resistive damping would give the opposite temperature/pressure variation [1].

The examples 1a, 2a, 3a, and 6a from 50 to 100 microns had no flutes in the oscillation phase and the temperatures calculated are lower limits assuming that λ_m is greater than the plasma circumference.

None of the conditions noted in Section 2, which must be satisfied for Eq. (4) to apply, can be thoroughly examined without an independent measurement of T_i. However, using the calculated values, it can be shown that in the examples during the implosion and oscillation phases the conditions (a) and (b) are satisfied. The approximation that the viscosity is not influenced by the magnetic field is probably satisfied as the ion collision time is less than or of the order of the ion cyclotron period.

The observed re-appearance of the instability during the rotation, after it had been damped out in the oscillation phase, is not predicted by the simple theory. It can be shown for a rotating plasma which is adiabatically compressed that once it is stable against Rayleigh-Taylor instabilities ($\lambda_m > 2\pi r$) it will remain stable on compression when the effect of the magnetic field on the viscosity is ignored, i.e. $(d/dr)\, (\lambda_m / 2\pi r) > 0$, because the increase in viscosity associated with the temperature increase on compression dominates other terms, and viscous damping will continue to be effective. However, if the effect of a magnetic field in the plasma, which tends to decrease the viscosity [4] [9], is included, then instability on compression is predicted. This follows since the expression for viscosity in the presence of a magnetic field has a factor which decreases when the ratio of the ion collision period to the ion cyclotron period increases; on compression this factor outweighs the increase due to the temperature increase, giving $(d/dr)\, (\lambda_m / 2\pi r) < 0$. It should be noted that this effect can be eliminated if trapped field is excluded from the plasma.

It is concluded that in order to account for the reappearance of the instability, either the viscosity must have been reduced by a magnetic field trapped in the plasma or conditions (a) or (b) (see Section 2) have been violated. At the time of rotational instability ough estimates indicate that all these possibilities re likely.

It follows from the above discussion that all the alculated temperatures shown in Table I are lower imits because of the omission of the magnetic field orrection term in the viscosity.

6. Conclusions

Instabilities due to the Rayleigh-Taylor mechanism ave been identified. Some of the examples observed lo not comply with the condition set by simple heory and these occurred when the assumption of small amplitude disturbances was violated. There was evidence for viscous damping, increasing in circumstances where the temperature increases, supporting the prediction of theory. The instability was completely damped in cases where the expected wavelength was greater that the plasma circumference. This absence of the instability at higher temperatures offers encouragement for future experiments with high temperature plasma.

Acknowledgements

This experiment was carried out in the A.W.R.E. Fusion Group under the direction of K. W. Allen. The authors are grateful to G. B. F. Niblett for many helpful discussions, to J. W. Long for assistance in the laboratory and to A. Skinner and R. J. Abrey for supplying the camera.

References

[1] Green, T. S., and Niblett, G. B. F., *Nuclear Fusion* **1** (1960) 42. A full list of references is given in this paper.

[2] Bodin, H. A. B., Green, T. S., Niblett, G. B. F. and Peacock, N. J., *Proceedings of the Fourth International Conference on Ionisation Phenomena in Gases, Uppsala* **2** (1959) 1061 and **2** (1959) 1965.

[3] Latham, R., Nation, J. A., Curzon, F. L., and Folkerski, A., *Nature* **186** (1960) 624, *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A 227** (1960) 386.

[4] Marshall, W., U. K. Atomic Energy Research Establishment (Harwell) Reports Nos. T/R 2247, 2352 and 2419 (1958).

[5] Spitzer, L., *Physics of Fully Ionized Gases* (Interscience, London and New York 1956).

[6] Fitch, R. A., and McCormick, N. R., *Proc. Instn. Elect. Engrs.* **106 A** (1959) 177.

[7] Lewis, D. J., *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A 202** (1950) 81.

[8] Taylor, G. I., *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A 201** (1950) 192.

[9] Kaufman, A. N., *Phys. Fluids* **3** (1960) 610.

(Manuscript received on 12 December 1960)

ABSTRACTS IN ENGLISH

Statistical thermodynamics of plasmas, H. S. Green *(University of Adelaide, South Australia)*

Nuclear Fusion 1 (1961) 69—77

A systematic method for the computation, with arbitrary accuracy, of the thermodynamic functions of a gaseous plasma is developed from first principles. The theory of the grand partition function is used to derive a set of exact integral equations, which determine the electronic and ionic distribution functions. An approximate solution of these equations yields results similar to those of the Debye-Hueckel theory of electrolytes. More exact solutions are developed and used to compute the equation of state and other thermodynamic functions for plasmas.

A simplified analysis of the dynamics of plasmas guns, J. G. Linhart *(Euratom - Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari, Frascati, Italy)*

Nuclear Fusion 1 (1961) 78—81

The subject of this report is the acceleration of a cylindrical layer of plasma by an azimuthal magnetic field—a process similar to the ordinary $B_\varphi I_z$ pinch. The magnetic field is generated by a current drawn from a condenser. The system can be represented by an L,C circuit in which the value of the inductance is changing owing to the movement of the plasma conductor. A simple, but approximate, description of the acceleration of the plasma can then be derived using the adiabatic theorem for oscillators together with the law of conservation of energy. The resulting approximate solutions are compared with numerical solutions of the appropriate differential equations. The approximate solutions are also applied to the rail-type of a plasma gun, previously reported by Artsimovich *et. al.* [*Zhurn. Eksptl' i Teoret. Fiz.* **33** (1957) 3].

Nonlinear oscillations of rarified plasma, A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, R. Z. Sagdeev *(I. V. Kurchatov Institute of Atomic Energy, U.S.S.R. Academy of Sciences, Moscow, U.S.S.R.)*

Nuclear Fusion 1 (1961) 82—100

The paper basically is a review of a number of studies devoted to the theory of nonlinear motions of plasma under conditions where collisions between particles do not play a determining role.

The problem is formulated in the introduction. It concerns the evolution in time of an initial perturbation of finite amplitude. The resulting physical picture will depend on these competing processes: nonlinear increase of wave steepness, dispersion, absorption and instability. In a number of cases where adsorption and instability are insignificant, it is possible to obtain an idea of the character of the nonlinear motions by applying the appropriate linear "dispersion law".

The second Section presents certain specific types of nonstationary nonlinear motions permitting exact mathematical solution, namely: nonlinear oscillations of electrons at zero temperature, nonlinear motion of plasma across a strong magnetic field, and ion waves of finite amplitude in non-isothermal plasma where $p_i \ll p_e$. In a number of instances, evolution of the initial perturbation leads to the formation of a multi-component current, some peculiarities of which are discussed in the third Section. In the next Section stationary nonlinear waves are described, i.e. waves not changing their form with time. In a particular case they are the so-called "solitary waves", similar to waves on the surface of heavy liquid in a channel of finite depth. The possibility of the existence of such waves requires linear laws of dispersion of a specific character. The possibility of "solitary" waves of rarefaction is pointed out.

The question of absorption of waves in rarified plasma is then discussed. An approximate "quasi-linear" method is developed which permits the kinetic considerations in the absorption of waves of finite amplitude to be simplified. The method consists in the representation of the distribution function $f(r, v, t)$ as a sum of rapidly and slowly varying terms. In the equation for the slowly varying term a quadratic average effect of fast oscillations is taken into consideration. This method is applied to two particular problems: the absorption of Langmuir electronic oscillations (in the limit of very small amplitude the equation for wave-damping goes over into the well-known formula for the so-called "Landau-damping"), and the cyclotronic absorption of transversely polarized waves which propagate along the constant magnetic field.

In the last section some types of instabilities of non-linear motions are shown. In addition to the instabilities associated with the multi-component motion, it is shown that waves in a magnetic field (in particular, solitary waves) are unstable if their amplitude exceeds a certain critical value which decreases as the plasma temperature decreases.

Fluctuations of a plasma (1), NORMAN ROSTOKER *(John Jay Hopkins Laboratory, General Atomic, San Diego, California, U.S.A.)* Nuclear Fusion 1 (1961) 101—120

We consider a fully ionized plasma. At time t the state of the system is represented by a point X in the phase space of all the particles. We define $D_s dX dX' \ldots dX^{(s)}$ as the joint probability that at time t the system will be in (X, dX), at time t' in (X', dX'), etc. A systematic procedure has been developed for calculating any desired moment of D_s as an expansion in the discreteness parameters e, m, and $1/n$. Spectral densities and autocorrelation functions can thus be obtained without any "Stoßzahlansatz" or Markoffian assumption. A comprehensive treatment of a plasma in thermal equilibrium has been carried out. A large class of non-equilibrium states may exist in a hot plasma for sufficient time to be considered stationary. Fluctuations have been calculated for the class of spatially homogeneous states of an infinite plasma. It is of some interest that thermal equilibrium relationships such as Kirchhoff's radiation law and the fluctuation-dissipation theorem survive. As an application we have calculated the degree of excitation of the collective modes such as plasma waves, ion oscillations, etc. For distribution functions which approach instability as some parameter is varied, the energy for some modes becomes very large and ultimately becomes infinite as instability is approached.

Equilibrium and stability of an axially symmetric plasma with anisotropic pressure, CLAUDE MERCIER, MICHEL COTSAFTIS *(Euratom — Commissariat à l'Energie Atomique, Fontenay-aux-Roses, Seine, France)* Nuclear Fusion 1 (1961) 121—124

The stability of axially symmetric plasma with anisotropic pressure is studied by extending the method used in a preceding paper [*Nuclear Fusion* **1** (1960) 47]. The necessary condition for stability, previously found for a scalar pressure, is generalized; two additional conditions appear which are always satisfied for a scalar pressure.

Voltage characteristics of a rotating plasma, B. LEHNERT *(Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden)* Nuclear Fusion 1 (1961) 125—130

The balance of forces is investigated for a rotating plasma contained in a long cylindrical vessel and placed in an axial magnetic field. A relation is deduced between the voltage which arises in a radial direction in the plasma and the electric charge being transmitted through the system from an external source. It is found that the equivalent capacity, which describes the electrical behaviour of the plasma, depends upon the transmitted charge and upon the constitution of the vessel wall. An explanation is suggested for the voltage limiting effect earlier observed in the Ixion device.

Plasma accumulation in a device fed by energetic-ion trapping, R. J. MACKIN, JR. *(Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, U.S.A.)* Nuclear Fusion 1 (1961) 131—138

Plasma accumulation (without energy losses) in a device in which energetic ions are injected and trapped has been discussed by Simon [*J. Nuclear Energy* **C 1**, (1960) 215]. Simon has presented a general steady-state theory for devices, such as the OGRA device, where trapping is initiated by interactions with background gas. For such devices there is usually a critical input current or critical plasma density (a function of input current) above which plasma density builds up to a value limited by Coloumb scattering losses. For a specific regime of operation (600-keV hydrogen molecular ion injection and dissociation, highly efficient ion-pumping action of the trapped plasma), simple approximate formulas are derived which describe the critical current or density for plasma buildup. Second-approximation formulas are derived which describe with about 10% error the overlapping segments of the density current curve for a broad range of parameters.

The analysis is then applied to a system in which the initial trapping is accomplished by a Luce carbon arc, e.g. DCX—2. Two new aspects emerge: (1) if the arc is turned off slowly or if an arc of lower density is used, then the critical current for plasma build-up with arc is nearly an order of magnitude less than previously estimated; and (2) the critical arc density, below which plasma build-up occurs after the arc is removed, is sufficiently low that energy losses to fixed-temperature arc electrons are not significant.

The time-dependence of plasma build-up, certain aspects of the impurity problem, and electron heating effects are also considered. Numerical examples are given for OGRA and DCX—2.

The damping of Rayleigh-Taylor instabilities in a thetatron discharge, H. A. B. BODIN, A. A. NEWTON, N. J. PEACOCK *(Atomic Weapons Research Establishment, Aldermaston, Berks., England)* Nuclear Fusion 1 (1961) 139—143

A high-speed framing camera has been used to photograph deuterium and helium discharges in which flute instabilities are driven by the inertial force of a radial acceleration. The wavelength of the instability increases with decreasing initial pressure, suggesting the damping effect of viscosity; in some cases this damping apparently prevents the growth of flutes entirely. A simple theory of viscous damping is in qualitative agreement with the observations. An instability due to the radial acceleration accompanying a rotation of the plasma appears at about peak field.

RÉSUMÉS EN FRANÇAIS

Thermodynamique statistique des plasmas, H. S. Green *(Université d'Adélaide, Australie-Méridionale)*
Fusion Nucléaire **1** (1961) 69—77

En partant des principes fondamentaux, l'auteur développe une méthode systématique pour un calcul de précision arbitraire des fonctions thermodynamiques d'un plasma gazeux. La théorie de la grande fonction de partition est utilisée en vue d'établir un ensemble exact d'équations des ions et des électrons. Une solution approximative de ces équations donne des résultats semblables à ceux de la théorie des électrolytes de Debye et Hueckel. L'auteur établit des solutions plus précises qu'il utilise pour calculer l'équation d'état et les autres fonctions thermodynamiques des plasmas.

Une analyse simplifiée de la dynamique de canons à plasma, J. G. Linhart *(Euratom — Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari, Frascati, Italie)*
Fusion Nucléaire **1** (1961) 78—81

Dans ce travail, on étudie l'accélération d'une couche cylindrique de plasma au moyen d'un champ magnétique azimutal — un processus semblable au pinch $B_\varphi I_z$ ordinaire. Le champ magnétique est créé par un courant déchargé d'un condensateur. Le système peut être représenté par un circuit L, C dans lequel la valeur de l'induction change en résultat du mouvement du plasma conducteur. On peut ainsi donner une description simple mais approximative de l'accélération du plasma par recours au théorème adiabatique pour les oscillateurs ainsi qu'à la loi de la conservation de l'énergie. Les solutions approximatives qui en résultent sont comparées avec les solutions numériques des équations différentielles appropriées. Les solutions approximatives sont également appliquées au type «rail» du canon à plasma antérieurement décrit par Artsimovitch *et al.* [*J. Eksptl' i Teoret. Fiz.* **33** (1957) *3*].

Les oscillations nonlinéaires d'un plasma raréfié, A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, R. Z. Sagdeev *(Institut d'Energie Atomique «I. V. Kurtchatov», Académie des Sciences de l'U.R.S.S., Moscou, U.R.S.S.)*
Fusion Nucléaire **1** (1961) 82—100

Cet article est essentiellement un aperçu des travaux traitant de la théorie des mouvements nonlinéaires du plasma dans des conditions où les chocs des particules ne jouent pas un rôle déterminant.

Le problème est formulé dans l'introduction: il s'agit du développement d'une perturbation initiale d'amplitude finie en fonction du temps. L'image physique qui en résulte dépend des phénomènes concurrents: accroissement nonlinéaire de la pente du front de l'onde, dispersion, absorption et instabilité. Dans un nombre de cas, où l'absorption et l'instabilité sont négligeables, on peut obtenir une indication du caractère des mouvements nonlinéaires en appliquant la «loi de dispersion» linéaire appropriée.

La deuxième partie est consacrée à la description de quelques types particuliers de mouvements nonlinéaires, nonstationnaires, qui permettent une solution mathématique exacte: oscillations nonlinéaires des électrons à température zéro; mouvements nonlinéaires du plasma en travers d'un champ magnétique intense; ondes d'ions d'amplitude finie dans un plasma non-isotherme où $p_i \ll p_e$. Dans plusieurs cas, l'évolution de la perturbation initiale entraîne la formation d'un courant à plusieurs composantes dont certaines caractéristiques sont examinées dans la troisième partie. Dans la quatrième partie, les auteurs décrivent les ondes stationnaires nonlinéaires, c'est-à-dire celles dont la forme ne change pas avec le temps. Dans un cas particulier, il s'agit d'ondes dites «ondes solitaires», qui ressemblent aux ondes à la surface d'un liquide lourd dans un canal de profondeur finie. De telles ondes ne peuvent se former que lorsque s'appliquent des lois linéaires de dispersion d'un caractère spécial. Les auteurs signalent la possibilité de formation d'ondes solitaires de raréfaction. Dans la cinquième partie, les auteurs étudient plus spécialement la question de l'absorption des ondes dans un plasma raréfié. Ils exposent une méthode quasilinéaire approximative qui permet de simplifier l'étude cinétique de l'absorption des ondes d'amplitude finie. Cette méthode consiste, en fait, à représenter la fonction de distribution $f\ (r, v, t)$ comme la somme de deux termes dont l'un varie rapidement et l'autre lentement. Pour l'équation relative au terme lent, on tient compte de l'effet quadratique moyen des oscillations rapides. On applique cette méthode à deux cas particuliers: 1°) l'absorption des oscillations électroniques de Langmuir [dans les limites des amplitudes très faibles, l'équation relative à l'amortissement des ondes devient la formule bien connue qui exprime l'«amortissement de Landau»], 2°) l'absorption cyclotronique des ondes polarisées transversalement qui se propagent le long d'un champ magnétique constant.

Dans la dernière partie, les auteurs indiquent quelques types d'instabilité des mouvements nonlinéaires. Ils montrent — en outre des instabilités des mouvements à plusieurs composantes examinées plus haut — que dans un champ magnétique les ondes (en particulier les ondes solitaires) sont instables quand leur amplitude dépasse une certaine valeur critique, qui décroît lorsque la température du plasma diminue.

Fluctuations du plasma (I), Norman Rostoker *(John Jay Hopkins Laboratory, General Atomic, San Diego, California, États-Unis)*
Fusion Nucléaire **1** (1961) 101 –120

L'auteur étudie un plasma entièrement ionisé. Au temps t, l'état du système est indiqué par un point X dans l'espace de phase de toutes les particules. Il définit $D_s\, dXdX'\ldots dX^{(s)}$ comme probabilité que le système se trouve au temps t en (X, dX), au temps t' en (X', dX') etc. Une méthode systématique est proposée pour calculer un moment quelconque de D_s par un développement en série des paramètres de «discreteness» e, m, $1/n$. On peut ainsi obtenir les densités spectrales et les fonctions d'autocorrélations sans recours au «Stosszahlansatz» ou à l'hypothèse de Markov. Un plasma en équilibre thermique fait l'objet d'une étude complète. Dans un plasma chaud, un grand nombre d'états de non-équilibre peuvent exister pendant une période suffisamment longue pour pouvoir les considérer comme stationnaires. Dans le cas d'un plasma infini, on a calculé les fluctuations de quelques états stables avec homogénéité spatiale. On observe que les relations d'équilibre thermique — telles que la loi de la radiation de Kirchhoff et le théorème des fluctuations dissipatives — restent valables. Comme exemple d'application, l'auteur a calculé le degré d'excitation des modes collectifs tels que les ondes du plasma, les oscillations ioniques, etc. En ce qui concerne les fonctions de distribution qui s'approchent de l'état d'instabilité lorsque certains paramètres sont variés, l'énergie devient très grande pour quelques modes et tend vers l'infini à mesure que l'on s'approche de l'instabilité.

Equilibre et stabilité d'un plasma en symétrie de révolution avec pression anisotrope, Claude Mercier, Michel Cotsaftis *(Euratom — Commissariat à l'Energie Atomique, Fontenay-aux-Roses, Seine, France)* Fusion Nucléaire **1** (1961) 121—124

Dans ce travail, on étudie la stabilité des plasmas en symétrie de révolution avec une pression anisotrope en généralisant les méthodes employées dans un article précédent [*Fusion Nucléaire* **1** (1960) 47]. On étend la condition nécessaire de stabilité déjà trouvée en pression scalaire et de plus apparaissent deux conditions nouvelles toujours vérifiées dans le cas précédent.

Caractéristiques du voltage d'un plasma en rotation, B. Lehnert, *(Institut Royal de Technologie, Stockholm, Suède)* Fusion Nucléaire **1** (1961) 125—130

L'auteur étudie l'équilibre des forces pour un plasma en rotation, confiné dans une chambre cylindrique allongée, et placé dans un champ magnétique axial. Il dérive une relation entre la tension produite en direction radiale dans le plasma, et la charge électrique engendrée par une source extérieure et transmise par ce système. Il trouve que la capacité équivalente, qui décrit le comportement électrique du plasma, dépend de la charge transmise par le plasma et de la constitution des parois de la chambre. Il propose une explication de l'effet de limitation de tension, déjà observé dans l'appareil «Ixion».

Accumulation de plasma dans un appareil alimenté par la capture d'ions énergétiques, R. J. Mackin, Jr. *(Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, Etats-Unis)* Fusion Nucléaire **1** (1961) 131—138

Simon [*J. Nuclear Energy* **C 1** (1960) 215] a traité l'accumulation d'un plasma, sans perte d'énergie, dans un appareil où les ions énergétiques sont injectés et capturés. Il a développé une théorie générale des états stationnaires pour des appareils tels que l'OGRA, où la capture est amorcée au moyen d'interactions avec des gaz résiduels. Dans les appareils de ce type on observe normalement un courant critique d'entrée ou une densité critique du plasma (une fonction du courant d'entrée). Quand ces quantités critiques sont surpassées, la densité du plasma s'accroît à une valeur limitée par les pertes dues à la diffusion Coloumbienne. Des simples formules approximatives sont dérivées pour des opérations spécifiques (injection à 600 keV de molécules d'hydrogène ionisées suivie de leur dissociation; le plasma capturé se comportant comme une pompe d'ions très effective). Ces formules approximatives fournissent une explication pour le courant et donc pour les densités critiques associées avec l'accroissement du plasma. Les formules de deuxième approximation, qui sont dérivées, décrivent avec une erreur de 10 % (pour une gamme étendue de paramètres) les zones de recouvrement de la courbe représentant la densité en fonction du courant.

Par suite, on applique cette méthode à un système dans lequel la capture initiale est accomplie par l'arc de carbone de Luce, comme par exemple dans l'appareil DCX-2. On constate deux aspects nouveaux: (1) si l'intensité de l'arc est lentement diminuée, ou si un arc de densité plus basse est utilisé, le courant de plasma est presque d'un ordre de grandeur inférieur à celui estimé dans les travaux antérieurs; et (2) la densité critique de l'arc (au-dessous de laquelle le plasma croît après la disparition de l'arc) est suffisamment basse pour que les pertes d'énergie aux électrons de température fixée soient peu importantes.

On a aussi étudié l'accroissement du plasma en fonction du temps, ainsi que certains aspects du problème d'impureté et les effets du chauffage des électrons. Des exemples numériques pour l'OGRA et le DCX-2 sont donnés.

L'amortissement des instabilités de Rayleigh-Taylor dans une décharge thétatronique, H. A. B. Bodin, A. A. Newton, N. J. Peacock *(Atomic Weapons Research Establishment, Aldermaston, Berkshire, Angleterre)* Fusion Nucléaire **1** (1961) 139—143

Les auteurs ont étudié — au moyen des photographies successives ultra-rapides — les instabilités caractérisées par les stries et produites par les forces inertiales dans des décharges en deutérium et hélium. Les stries sont poussées par la force inerte d'une accélération radiale. La longueur d'onde associée avec l'instabilité s'accroît à mesure que décroît la pression initiale — un effet suggérant un amortissement dû à la viscosité. Dans certaines conditions cet amortissement semble supprimer entièrement le développement des stries. L'hypothèse simple proposée pour l'amortissement dû à la viscosité est en accord qualitatif avec les expériences. Une instabilité — attribuée à l'accélération radiale associée avec la rotation du plasma — apparaît au moment où le champ magnétique approche du maximum.

АННОТАЦИЯ ПО-РУССКИ

Статистическая термодинамика плазмы, Х. С. Грин, *(Аделаидский университет, Южная Австралия)*

Ядерный синтез **1** (1961) 69—77

Исходя из основных принципов, разрабатывается систематический метод вычисления — с произвольной точностью — термодинамических функций газообразной плазмы. Теория функции распределения применяется для вывода системы точных интегральных уравнений, определяющих функции распределения ионов и электронов. Приближенное решение этих уравнений дает результаты, подобные результатам теории электролитов Дебай-Хюкеля. Приводятся более точные решения, которые используются для вычисления уравнения состояния и других термодинамических функций плазмы.

Упрощенный анализ динамики плазменной пушки, Дж. Г. Линхарт, *(Евратом — Национальный комитет по ядерным исследованиям, Фраскати, Италия)*

Ядерный синтез **1** (1961) 78—81

Темой этого отчета является рассмотрение ускорения цилиндрического плазменного слоя азимутальным магнитным полем — процесс подобный обыкновенному $B_\varphi I_z$ пинчу. Магнитное поле генерируется током от конденсатора. Эту систему можно изобразить цепью L, C, в которой величина индуктивности меняется в зависимости от движения плазменного проводника. Таким образом, на основании адиабатической теоремы для осцилляторов и закона сохранения энергии можно вывести простое, но приближенное описание ускорения плазмы. Полученные приближенные решения сравниваются с цифровыми решениями соответствующих дифференциальных уравнений. Приближенные решения также применимы для случая плазменной пушки «рельсового» типа, ранее описанной Арцимовичем и др. [*Жур. экспер. и теор. физ.* **33** (1957) 3].

Нелинейные колебания разреженной плазмы, А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев *(Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова Академии Наук СССР, Москва, СССР)*

Ядерный синтез **1** (1961) 82—100

Статья, в основном, представляет собой обзор ряда работ, посвященных теории нелинейных движений плазмы в условиях, когда столкновения между частицами не играют определяющей роли.

Во введении формулируется постановка задачи: об эволюции во времени начального возмущения конечной амплитуды. Возникающая физическая картина будет зависеть от конкуренции между процессами: нелинейного увеличения крутизны, дисперсии, поглощения и неустойчивости. В ряде случаев, когда поглощение и неустойчивость несущественны, можно получить представление о характере нелинейных движений, привлекая соответствующий линейный «закон дисперсии».

Вторая глава посвящена изложению некоторых частных типов нестационарных нелинейных движений, допускающих точное математическое решение: нелинейные колебания электронов при $T = 0$, нелинейные движения плазмы поперек сильного магнитного поля, ионные волны конечной амплитуды в неизотермической плазме при $p_i \ll p_e$. В ряде случаев эволюция начального возмущения приводит к образованию многопотоковых течений, некоторые особенности которых обсуждаются в гл. 3. В четвертой главе описаны установившиеся нелинейные волны, т.е. волны, не меняющие своей формы во времени. В частном случае это так называемые «уединенные» волны, наподобие волн на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. Возможность существования таких волн требует линейные законы дисперсии определенного характера. Указывается на возможность уединенных волн разрежения.

В пятой главе специально обсуждается вопрос о поглощении волн в разреженной плазме. Развивается приближенный «квазилинейный» метод, позволяющий упростить кинетическое рассмотрение поглощения волн конечной амплитуды. Сущность метода заключается в том, что функция распределения $f(r, v, t)$ представляется в виде суммы быстро и медленно меняющихся частей. При этом в уравнении для медленно меняющейся части учитывается квадратичный усредненный эффект быстрых осцилляций. Метод применяется к двум частным задачам: о поглощении ленгмюровских электронных колебаний (в пределе очень малых амплитуд выражение для затухания волн переходит в известную формулу для так называемого «затухания Ландау»), о циклотронном поглощении поперечно поляризованных волн, распространяющихся вдоль постоянного магнитного поля.

В последней 6-ой главе указываются некоторые типы неустойчивости нелинейных движений. Кроме неустойчивостей многопотокового движения показана неустойчивость волн в магнитном поле (в частности, уединенных волн), если их амплитуда превышает некоторое критическое значение, тем меньшее, чем меньше температура плазмы.

Флюктуации плазмы (I), Норман Ростокер *(Лаборатория имени Дж. Дж. Гопкинса теоретической и прикладной науки, „Дженерал атомик“, Сан Диего, Калифорния, США)*

Ядерный синтез **1** (1961) 101—120

Исследуется полностью ионизированная плазма. В любой момент времени t состояние системы представляется точкой X в фазовом пространстве всех частиц. $D_s dX dX' \ldots dX^{(s)}$ определяется как полная вероятность, что в момент времени t система будет находиться в (X, dX). а в момент времени t', в $(X', dX',)$ и т.д. Разработан систематический метод вычисления любого момента D_s путем распространения параметров дискретности e, m, и $1/n$. Таким образом можно получить спектральные плотности и функции автокорелляции без ссылки на «Stoßzahlansatz» и условия Маркова. Проведено исчерпывающее исследование плазмы в тепловом равновесии. В горячей плазме большая группа состояний неравновесия может существовать в течение достаточно продолжительного времени, чтобы можно было рассматривать эти состояния как стационарные. Рассчитаны флюктуации для группы пространственно гомогенных стабильных состояний в неограниченной плазме. Отмечается, что некоторые тепловые равновесия — как напр. закон излучения Кирхгоффа и теорема флюктуационной диссипации — остаются в силе. В качестве применения мы вычислили степень возбуждения таких коллективных образований, как плазменные волны, осцилляции ионов и т.д. Для случая функций распределения, стремящихся к нестабильности по мере изменения параметров, энергия некоторых образований сильно возрастает, стремясь к бесконечности при приближении к нестабильности.

Равновесие и устойчивость плазмы с осевой симметрией при анизотропном давлении, КЛОД МЕРСЬЕ, МИШЕЛЬ КОТСАФТИС *(Евратом — Комиссариат по атомной энергии, Фонтене-о-Роз, Франция)*

Ядерный синтез **1** (1961) 121—124

Устойчивость плазмы с осевой симметрией при анизотропном давлении изучается путем обобщения методов, примененных в предыдущей статье [*Ядерный синтез* **1** (1960) 47]. Обобщаются необходимые условия для устойчивости, установленные ранее для скалярного давления; появляются два новых состояния, которые всегда удовлетворяются для случая скалярного давления.

Характеристика напряжения вращающейся плазмы, Б. ЛЕНЕРТ *(Королевский институт технологии, Стокгольм, Швеция)*

Ядерный синтез **1** (1961) 125—130

Исследуется равновесие сил в случае вращающейся плазмы, удерживаемой в продольном цилиндрическом сосуде и находящейся в осевом магнитном поле. Выводится соотношение между напряжением, возникающим в радиальном направлении в плазме и проводимым через систему электрическим зарядом из внешнего источника. Констатируется, что эквивалентная емкость, определяющая электрическое поведение плазмы, зависит от заряда, проводимого через плазму, и от стенок сосуда. Дается объяснение эффекта, ограничивающего напряжение, который ранее наблюдался в установке «Иксион».

Аккумулирование плазмы в установке питаемой захватом энергетических ионов, Р. ДЖ. МАККИН *(Ок-Риджская национальная лаборатория, Ок Ридж, Теннесси, США)*

Ядерный синтез **1** (1961) 131—138

Саймон [*Ж. Нюклеар енерджи* **С 1** (1960) 215] описывает аккумулирование плазмы (без потери энергии) в установке с введением и захватом энергетических ионов. Саймон дает общую теорию установившегося режима для установок таких как OGRA, в которых начальный захват вызывается взаимодействиями с остаточными газами. В случае установок этого типа, обычно наблюдается критический входящий ток или критическая плотность плазмы (функция входящего тока) при превышении которой плотность плазмы возрастает до величины, ограниченной потерями на Кулоновское рассеяние. Выводятся простые приближенные формулы для конкретного режима работы (введение молекул ионизированного водорода при 600 kev и их диссоциация, действие захваченной плазмы как высоко-эффективного ионного насоса). Эти приближенные формулы описывают критический ток или критическую плотность, связанную с нарастанием плазмы. Выводятся формулы для второго приближения, описывающие с погрешностью около $10^{0}/_{0}$ участки перекрытия плотности в зависимости от кривой тока для широкого диапазона параметров.

Затем этот анализ применяется к системе, в которой первоначальный захват совершается с помощью угольной дуги Люса, напр. DCX-2. Появляется два новых аспекта: 1) если дуга выключается медленно, или если используется дуга меньшей плотности, то критический ток нарастания плазмы получается почти на один порядок величины меньше предварительных оценок, и 2) критическая плотность дуги, (ниже которой нарастание плазмы происходит после выключения дуги) достаточно низка, чтобы потери энергии на электроны дуги при фиксированной температуре были незначительными.

Изучаются также временная зависимость нарастания плазмы, некоторые проблемы примесей и эффекты нагревания электронов. Даются примеры для OGRA и DCX-2.

Гашение неустойчивостей Релея-Тэйлора в тетатронном разряде, Х. А. Б. БОДИН, А. А. НЬЮТОН, Н. ДЖ. ПИКОК *(Научно-исследовательский центр по атомному оружию, Олдермастон, Беркшир, Англия)*

Ядерный синтез **1** (1961) 139—143

Фоторегистратор, работающий в режиме лупы времени был использован для получения фотографий дейтериевых и гелиевых разрядов, в которых желобкообразные неустойчивости поддерживаются инерционными силами радиального ускорения. Длина волны неустойчивости увеличивается по мере уменьшения начального давления, что свидетельствует о гасящем действии вязкости; в некоторых случаях это гашение повидимому полностью предотвращает образование желобков. Простая теория вязкого гашения качественно согласуется с результатами экспериментов. Неустойчивость, обусловленная радиальным ускорением сопровождающим вращение плазмы появляется в тот момент, когда магнитное поле приближается к пику.

RESÚMENES EN ESPAÑOL

Termodinámica estadística de los plasmas, H. S. Green *(Universidad de Adelaida, Australia Meridional)*
Fusión Nuclear **1** (1961) 69—77

Partiendo de principios fundamentales, el autor desarrolla un método sistemático para calcular, con precisión arbitraria, las funciones termodinámicas de un plasma gaseoso. Utiliza la teoría de la gran función de partición para obtener una serie de ecuaciones integrales exactas, que determinan las funciones de distribución electrónica e iónica. Una solución aproximada de estas ecuaciones proporciona resultados semejantes a los obtenidos al aplicar la teoría de los electrolitos de Debye-Hueckel. El autor obtiene soluciones más precisas, que utiliza para calcular la ecuación de estado y otras funciones termodinámicas de los plasmas.

Análisis simplificado de la dinámica de los cañones de plasma, J. G. Linhart (*Asociación Euratom C.N.R.N., Frascati, Italia*)
Fusión Nuclear **1** (1961) 78—81

En este trabajo, se estudia la aceleración de una capa cilíndrica de plasma por medio de un campo magnético azimutal, proceso análogo a la autoconstrucción B/I_z ordinaria. El campo magnético es generado por la corriente suministrada por un condensador. El sistema puede representarse por un circuito L, C en el cual el valor de la inductancia varía debido al movimiento del plasma conductor. Se puede dar una descripción simple, pero aproximada de la aceleración del plasma recurriendo al teorema adiabático para los osciladores, así como a la ley de la conservación de la energía. Las soluciones aproximadas resultantes se comparan con las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales correspondientes. Las mismas soluciones se aplican también al cañón de plasma de tipo «riel», anteriormente descrito por Artsimovich y col. [*Zhurn. Eksptl' i Teoret. Fiz.* **33** (1957) 3].

Oscilaciones no lineales de un plasma rarificado, A. A. Vedenov, E. P. Velijov y R. Z. Sagdeiev (*Instituto de Energía Atómica I. V. Kurchatov, Academia de Ciencias de la URSS, Moscú*)
Fusión Nuclear **1** (1961) 82—100

Este artículo constituye en esencia una reseña de los trabajos dedicados a la teoría de los movimientos no lineales del plasma en condiciones en que las colisiones entre partículas no desempeñan un papel decisivo. El planteamiento del problema se formula en la introducción: se refiere a la evolución de una perturbación inicial de amplitud finita en función del tiempo. La imagen física resultante dependerá de una competencia entre los siguientes procesos: aumento no lineal de la pendiente, dispersión, absorción e inestabilidad. En determinados casos, cuando la absorción y la inestabilidad son despreciables, es posible formarse una idea de la índole de los movimientos no lineales aplicando la «ley de dispersión» lineal apropiada.

La segunda parte del trabajo está dedicada a la descripción de algunos tipos particulares de movimientos no lineales y no estacionarios, que admiten una solución matemática exacta: oscilación no lineal de los electrones a la temperatura cero, movimientos no lineales del plasma a través de un campo magnético intenso y ondas iónicas de amplitud finita en un plasma no isotérmico cuando $p_i \ll p_e$. En algunos casos, la evolución de la perturbación inicial da origen a la formación de un flujo de varios componentes, algunas de cuyas características se estudian en la tercera parte del trabajo. En la cuarta parte, los autores describen las ondas estacionarias no lineales, es decir, aquellas ondas cuya forma no varía con el tiempo. En un caso particular, se trata de las denominadas «ondas solitarias», análogas a las ondas que se forman en la superficie de un líquido denso en un canal de profundidad finita. Estas ondas sólo pueden formarse cuando rijan leyes lineales de dispersión de carácter específico. Los autores mencionan la posibilidad de que se formen «ondas solitarias» de rarefacción. En la quinta parte, los autores estudian especialmente la cuestión de la absorción de las ondas en un plasma rarificado. Exponen un método aproximado «cuasi lineal» que permite simplificar el estudio cinético de la absorción de las ondas de amplitud finita. Este método consiste esencialmente en representar la función de distribución $f\ (r, v, t)$ como suma de dos términos, uno de los cuales varía rápida y el otro, lentamente. En la ecuación relativa al término lento, se tiene en cuenta el efecto cuadrático medio de las oscilaciones rápidas. Este método se aplica a dos casos particulares: 1) el de la absorción de las oscilaciones electrónicas de Langmuir (en el intervalo de las amplitudes muy pequeñas, la expresión del amortiguamiento de las ondas se transforma en la conocida fórmula del llamado «amortiguamiento de Landau»), y 2) el de la absorción ciclotrónica de las ondas transversalmente polarizadas que se propagan a lo largo de un campo magnético constante.

En la última parte, los autores mencionan algunos tipos de inestabilidades de los movimientos no lineales. Se refieren no solamente a las inestabilidades asociadas a los flujos de varios componentes, sino también a la inestabilidad de las ondas en un campo magnético (ondas solitarias especialmente), que se observa cuando su amplitud supera cierto valor crítico, que disminuye a medida que la temperatura del plasma desciende.

Fluctuaciones de un plasma (I), N. Rostoker (*John Jay Hopkins Laboratory, General Atomic, San Diego, California, Estados Unidos*)
Fusión Nuclear **1** (1961) 101—120

El autor considera un plasma totalmente ionizado. En el instante t, el estado del sistema está representado por un punto X en el espacio fásico de todas las partículas. Define $D_s/dXdX' \ldots dX^{(s)}$, como la probabilidad de que el sistema se encuentre en (X, dX) en el instante t, en (X', dX') en el instante t', etc. Propone un método sistemático para calcular un momento cualquiera de D_s como un desarrollo en serie en los parámetros de discontinuidad e, m y $1/n$. Así se pueden hallar las densidades espectrales y las funciones de autocorrelación prescindiendo del — «Stosszahlansatz» y de la hipótesis de Markov. El autor hace un estudio completo de un plasma en equilibrio térmico. En un plasma caliente, puede existir un gran número de estados de no equilibrio durante un período suficientemente largo para poder considerarlos como estacionarios. El autor ha calculado las fluctuaciones de los estados especialmente homogéneos de un plasma infinito. Es interesante observar que siguen cumpliéndose las relaciones de equilibrio térmico, tales como la ley de la radiación de Kirchhoff y el teorema de la disipación de fluctuaciones. Como ejemplo de aplicación, el autor ha calculado el grado de excitación de modos colectivos, tales como las ondas de plasma, las oscilaciones iónicas, etc. En el de funciones de distribución que se aproximan al estado de inestabilidad cuando se hace variar algún parámetro, la energía es muy grande para ciertos modos y tiende a infinito a medida que se va alcanzando la inestabilidad.

Equilibrio y estabilidad de un plasma de simetría axial con presión anisotrópica, C. Mercier y M. Cotsaftis *(Groupe de Recherches de l'Association Euratom-CEA sur la Fusion, Fontenay-aux-Roses, Seine, Francia)*
Fusión Nuclear **1** (1961) 121—124

En este trabajo los autores estudian la estabilidad de los plasmas de simetría axial con presión anisotrópica, generalizando los métodos expuestos en un trabajo precedente [*Fusión Nuclear* **1**, (1960) 47]. Extienden la condición necesaria de estabilidad previamente hallada para una presión escalar y, además, aparecen dos condiciones nuevas que se cumplen siempre en el caso precedente de presión escalar.

Características de la tensión de un plasma en rotación, B. Lehnert *(Real Instituto de Tecnología de Estocolmo, Suecia)*
Fusión Nuclear **1** (1961) 125—130

El autor estudia el equilibrio de fuerzas en el caso de un plasma en rotación, confinado en una cámara cilíndrica alargada y colocado en un campo magnético axial. Establece una relación entre la tensión producida en la dirección radial del plasma, y la carga eléctrica generada por una fuente exterior y transmitida a través del sistema. Comprueba que la capacidad equivalente, que describe el comportamiento eléctrico del plasma, depende de la carga transmitida por el mismo y de la constitución de las paredes de la cámara. Propone una explicación del efecto de limitación de tensión, ya observado en el aparato «Ixión».

Acumulación del plasma en un aparato alimentado por captura de iones energéticos, J. R. Mackin, Jr. *(Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, Estados Unidos)*
Fusión Nuclear **1** (1961) 131—138

Simon ha estudiado [*J. Nuclear Energy* **C 1** (1960) 215] la acumulación de plasma, sin pérdida de energía, en un aparato en el que se inyectan y capturan iones energéticos. Ha formulado una teoría general de los estados estacionarios para aparatos tales como el OGRA, en los que la captura se inicia por medio de interacciones con gases residuales. En los aparatos de este tipo, se observa normalmente una intensidad crítica de la corriente de entrada o una densidad crítica del plasma (que es función de la corriente de entrada), por encima de los cuales la densidad del plasma aumenta hasta alcanzar un valor limitado por pérdidas debidas a la dispersión de Coulomb. El autor deduce fórmulas sencillas y aproximadas para un régimen de funcionamiento dado (inyección a 600 keV de moléculas de hidrógeno ionizadas, seguida de su disociación; comportamiento del plasma capturado como bomba iónica muy eficaz). Dichas fórmulas aproximadas describen la intensidad de corriente crítica, o la densidad crítica para el crecimiento del plasma. Las fórmulas de segunda aproximación que el autor establece describen con un error del 10 por ciento, para una extensa gama de parámetros, las zonas de superposición de la curva representativa de la densidad en función de la intensidad de la corriente.
A continuación, el autor aplica este método de análisis a un sistema en el que la captura inicial se realiza por medio de un arco de carbono de Luce, como por ejemplo en el aparato DCX-2. Se observan dos aspectos nuevos: 1) si la densidad del arco se hace disminuir lentamente o si se utiliza un arco de menor densidad, la intensidad de la corriente crítica para el crecimiento del plasma es inferior en casi un orden de magnitud a la estimada en los trabajos anteriores; 2) la densidad crítica del arco, por debajo de la cual el plasma crece después de la interrupción del mismo, es suficientemente baja para que las pérdidas de energía en los electrones del arco de temperatura fija revistan poca importancia.
El autor ha estudiado también el crecimiento del plasma en función del tiempo, así como ciertos aspectos del problema de las impurezas y efectos de calentamiento de los electrones. Cita ejemplos numéricos para los aparatos OGRA y DCX-2.

Amortiguamiento de las inestabilidades de Rayleigh-Taylor de una descarga de un thetatrón, H. A. B. Bodin, A. A. Newton y N. J. Peacock *(A. W. R. E., Aldermaston, Berkshire, Reino Unido)*
Fusión Nuclear **1** (1961) 139—143

Los autores han utilizado una cámara ultrarrápida para obtener fotografías sucesivas de descargas en deuterio y helio, en las que las inestabilidades por estrías son arrastradas por la fuerza de inercia de una aceleración radial. La longitud de onda asociada a la inestabilidad aumenta a medida que la presión inicial disminuye, efecto que sugiere un amortiguamiento debido a la viscosidad. En algunos casos, este amortiguamiento parece impedir por completo la formación de estrías. El resultado de las experiencias concuerda en general con la teoría simple del amortiguamiento viscoso. En el momento en que la intensidad del campo magnético se aproxima al máximo, aparece una inestabilidad debida a la aceleración radial asociada a la rotación del plasma.

Page 8 Equation (54) can be simplified. Multiply Eq. (55) by $\mathbf{w}$ and integrate over $d^3\mathbf{w}$, assuming the current to be borne principally by the electrons:

$$-\frac{e}{\Theta}\left[\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\mathbf{U}_0\times\mathbf{B}\right]-\nabla\ln N\Theta$$
$$=-\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{B}}{N\Theta c}+[(2\pi e^4\ln\Lambda)/m]\int d^3\mathbf{w}\,f_0^-(\mathbf{w})\cdot\frac{w^2\mathbf{I}-\mathbf{w}\,\mathbf{w}}{w^3}\cdot\nabla_w\,\Phi^+(\mathbf{w})$$

This permits one to reduce Eq. (54) to the form:

$$\left\{\left(\frac{mw^2}{2\Theta}-\frac{5}{2}\right)\mathbf{w}\cdot\nabla\ln\Theta+\left(\frac{M}{\Theta}\,\mathbf{w}\,\mathbf{w}-\frac{1}{3}\,w^2\mathbf{I}\right):\nabla\,\mathbf{U}_0-\left[\frac{e}{\Theta}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\mathbf{U}_0\times\mathbf{B}\right)+\nabla\ln N\Theta\right]\cdot\mathbf{w}\right\}f_0^+$$
$$=\frac{e}{Mc}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}\times\nabla_w\Phi^+f_0^+$$
$$+\nabla_w\cdot\left\{\frac{2\pi e^4\ln\Lambda}{M^2}\int d^3\,\mathbf{w}'\,f_0^+(w)\,f_0^+(w')\,\frac{g^2\mathbf{I}-\mathbf{g}\,\mathbf{g}}{g^3}\cdot[\nabla_w\Phi^+(\mathbf{w})-\nabla_{w'}\Phi^+(\mathbf{w}')]\right\}$$

It should be noted that no electron quantities are involved. Hence the ions behave like a simple gas.

Pages 22, 23 Corrected equations are:

Eq. (116) $y_c=\left(1+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

Eq. (117) $\lambda_c=(2u/\omega_{pe})\left(1+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Eq. (120) $x=x_c\pm\mathrm{i}\varepsilon^{\frac{1}{6}}\left[\frac{2}{3}\,\frac{y-y_c}{\left(1+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$

Eq. (126) $(y/x)-1=\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ at $y=y^*$

Eq. (130) $y^*=1+\frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Eq. (131) $x^*=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+\ldots\right]+\mathrm{i}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}[1+\ldots]$

Eq. (132) $\mathrm{Im}\,x^*=\mathrm{Im}\,\frac{\omega^*}{\omega_{pe}}$

Page 63 In Eq. (12) delete E_r from exponential preceding the integral.

Translations

A limited number of copies of the translated texts (without figures and equations) of articles which have appeared in "Nuclear Fusion" will soon be available for subscribers to the journal or for those official agencies, exchange centers, governmental libraries, etc. who receive free copies of the journal.

If you are subscriber, or an official recipient, and wish to receive a copy of one or more translated texts, address your request to "The Editor, Nuclear Fusion, International Atomic Energy Agency, Kaerntner Ring 11, Vienna I, Austria". Include your address and the "TT" number (see list below) of the translated texts which you wish.

Traductions

Un nombre limité d'exemplaires des traductions (sans figures ni équations) des articles parus dans «Fusion nucléaire» seront prochainement à la disposition des abonnés et des institutions officielles, centres d'échange, bibliothèques nationales, etc. qui reçoivent des exemplaires gratuits de la revue.

Si vous êtes abonné à la revue ou si elle vous parvient à titre officiel, et si vous désirez un exemplaire d'une ou de plusieurs traductions, adressez votre demande au Rédacteur de «Fusion nucléaire», Agence internationale de l'énergie atomique, Kaerntner Ring 11, Vienne I, Autriche. Indiquez votre adresse et le numéro «TT» (voir liste ci-dessous) des traductions qui vous seraient utiles.

Переводы

В скором времени ограниченное число экземпляров переведенных текстов статей (без чертежей и формул), появившихся в журнале „Ядерный синтез", будет предоставлено подписчикам журнала или тем официальным учреждениям, центрам по обмену информацией, правительственным библиотекам и т.д., которые получают бесплатные экземпляры журнала.

Если вы являетесь подписчиком или официальным получателем и желаете получить экземпляр одного или более переведенных текстов, обращайтесь по адресу: „The Editor, Nuclear Fusion, International Atomic Energy Agency, Kaerntner Ring 11, Vienna I, Austria". Укажите ваш адрес и номер «TT» переведенных текстов (см. таблицу ниже) которые вы желаете получить.

Traducciones

En breve se dispondrá de un número limitado de ejemplares de los textos traducidos (sin cifras ni ecuaciones) de los artículos aparecidos en «Fusión Nuclear» para las personas suscritas a la revista o para los organismos oficiales, centros de intercambio, bibliotecas públicas, etc., que reciben ejemplares gratuitos.

Si está usted suscrito a la revista, o la recibe a título oficial, y desea recibir un ejemplar de uno o más textos traducidos, pídalos a la dirección siguiente: «Redactor de "Fusión Nuclear", Organismo Internacional de Energía Atómica, Kaerntner Ring 11, Viena I, Austria». Indique su dirección y el número «TT» de los textos traducidos (véase la lista a continuación) que desee.

				* Translated into
TT-1	*Nuclear Fusion* **1**	(1960)	3—41	R
TT-2	*Nuclear Fusion* **1**	(1960)	42—46	R
TT-3	*Nuclear Fusion* **1**	(1960)	47—53	E
TT-4	*Nuclear Fusion* **1**	(1960)	47—53	R
TT-5	*Nuclear Fusion* **1**	(1960)	54—61	R
TT-6	*Nuclear Fusion* **1**	(1960)	62—63	R
TT-7	*Nuclear Fusion* **1**	(1961)	82—100	E
TT-8	*Nuclear Fusion* **1**	(1961)	121—124	E

---

* E — English, R — Russian

INFORMATION FOR AUTHORS

Inquiries should be addressed to "The Editor, NUCLEAR FUSION, International Atomic Energy Agency, Vienna I, Austria."

Layout of Manuscripts

Authors should set out their manuscripts as follows:

a) *Form of manuscript:* A manuscript may be submitted in English, French, Russian or Spanish. It should be typed in *double* or *triple spacing*, with *wide margins*, and be on good quality paper: *two additional copies* on thin paper should be attached;

b) *Equations* should be numbered consecutively, using *Arabic numerals* in *brackets* the number being placed at the right side of each equation, e.g. "(2)". Where possible, the exact equation will be used in all translations. It is therefore preferable to use only those symbols which are recognized internationally and to avoid abbreviations of words which are meaningful only in a particular language (e.g. E_{eff}, t_{max}, etc.). Simple symbols should be used and their meanings defined in the text.

c) *Figures:*

   1) Each figure should be on a *separate page* and numbered consecutively with *Arabic numerals*, e.g. "Fig. 1" etc.;
   2) Captions for all figures should be listed on a *separate page* and numbered appropriately;
   3) Photographs (glossy prints) should not be sent unless they are indispensable;
   4) Line drawings are preferred, if possible black ink on white tracing paper;
   5) To facilitate translation, internationally-recognized symbols only should be used on all figures, their definitions to be included in the captions.

d) *Footnotes* should be numbered consecutively with *Arabic numerals* and marked within the text where they occur. They should then be listed on a separate page.

e) *References* should be marked in the text consecutively in *Arabic* numerals in square brackets, and the full references listed in numerical order on a *separate page*. Examples of the forms to be used: "[1] SMITH, A. B., *Phys. Rev.* **206** (1955) 483" or "[2] JONES, L. M., Plasma Physics (XYZ Book Co., New York, 1951) 59".

f) *Tables* should be numbered consecutively with *Roman numerals*. The captions should be listed on a *separate page*. Wherever possible internationally-recognized symbols should be used in the column and their meanings defined in the text of the captions. Dimensions should be given in the table captions.

g) *An author's summary* (not more than 300 words) of each article should be included with the manuscripts. The summary will be translated and will appear in the journal in the four official languages of the Agency.

Note:

One original and two copies of all figures, tables and separate pages of footnotes and references are necessary.

When submitting the manuscript, the author should give the name of the person to whom the galley proofs should be sent, with the exact address. Reprint order forms will be sent with the galley proofs.

If the manuscript is accepted, 50 free reprints will be sent to the author. Any additional reprints *must* be ordered when the author returns the galley proofs.

RENSEIGNEMENTS A L'USAGE DES AUTEURS

Les demandes de renseignements doivent être adressées au «Rédacteur en chef, FUSION NUCLEAIRE, Agence internationale de l'énergie atomique, Vienne I (Autriche)»

Présentation des manuscrits

Les auteurs voudront bien se conformer aux dispositions suivantes:

a) *Forme du manuscrit* Les manuscrits peuvent être rédigés en anglais, francais, espagnol ou russe. Ils doivent être dactylographiés *à double* ou *triple interligne*, avec de *grandes marges* et sur du papier de bonne qualité; *deux copies supplémentaires* sur papier pelure seront jointes à chacun d'eux.

b) *Les équations* doivent être numérotées selon l'ordre dans lequel elles sont données, à l'aide de *chiffres arabes* entre *parenthèses*, le chiffre se trouvant à droite de chacune d'elles. Dans la mesure du possible, l'équation sera reproduite exactement dans toutes les traductions. Il est donc préférable de n'utiliser que des symboles reconnus sur le plan international et d'éviter les abréviations qui n'ont de signification que dans une langue déterminée (par exemple: V_{im}, V_{ret}, etc.). Il importe d'utiliser des symboles simples et de préciser leur signification dans le texte.

c) *Croquis.*

   1) Chaque croquis doit figurer sur une *page distincte;* tous les croquis doivent être numérotés, à l'aide de *chiffres arabes,* selon l'ordre dans lequel ils sont présentés, par exemple: Fig. 1, etc.
   2) Les légendes de tous les croquis doivent figurer sur une *page distincte* et être numérotées des manière appropriée.
   3) Des photographies ne doivent être envoyées que si elles sont indispensables.
   4) Il est préférable de soumettre des dessins au trait, si possible à l'encre noire sur papier calque blanc.
   5) Pour faciliter la traduction, il est recommandé de n'utiliser, pour tous les croquis, que des symboles reconnus sur le plan international, et dont la définition devra figurer dans les légendes.

d) *Les renvois à des notes* doivent être indiqués dans le texte, en *chiffres arabes entre crochets,* dans l'ordre numérique. Les notes elles-mêmes figureront sur une page distincte.

e) *Les renvois à des références* doivent être indiqués dans le texte, *en chiffres arabes,* dans l'ordre numérique; les références elles-mêmes figureront dans l'ordre numerique sur une *page distincte.* Exemples des formules à utiliser «[5] DURAND, P., C. R. Acad. Sci. [Paris. **376** (1956) 1344» ou «DUPONT, J., Physique des plasmas, (Nathan, Paris 1957) 59».

f) *Les tableaux* doivent être numérotés en *chiffres romains,* selon l'ordre dans lequel ils sont présentés. Les légendes doivent être reproduites sur une *page distincte.* Dans toute la mesure du possible, il convient d'employer des symboles reconnus sur le plan international et de définir leur signification dans le texte des légendes. Les dimensions doivent être indiquées dans les légendes des tableaux.

g) *Un résumé* (300 mots environ) de chaque article doit être joint au manuscrit. Le résumé sera traduit et publié dans la revue dans les quatre langues de travail de l'Agence.

Note

Il est nécessaire de fournir un original et deux copies de tous les croquis, tableaux et pages de notes et de références.

En soumettant son manuscrit, l'auteur indiquera le nom de la personne à laquelle les premières épreuves devront être envoyées en même temps que son adresse exacte. Un bon de commande pour les tirés à part sera joint aux épreuves. Cinquante tirés à part de chaque article publié seront envoyés gracieusement à l'auteur. S'il désire recevoir des examplaires supplémentaires, il devra en faire la demande lorsqu'il renverra les épreuves.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

За справками следует обращаться по адресу: «Редактору журнала «Ядерный синтез», Международное агентство по атомной энергии, Вена I, Австрия.»

Порядок оформления рукописей

Авторам предлагается следующий порядок оформления рукописей:

a) *Форма рукописи.* Рукопись может быть представлена на английском, русском, французском или испанском языке. Текст рукописи должен быть отпечатан на пишущей машинке *через два или три интервала*, иметь *широкие поля* и быть представлен на бумаге хорошего качества в *трех экземплярах.*

b) *Уравнения* должны быть последовательно пронумерованы *арабскими цифрами в скобках* которые должны быть расположены справа от уравнения, напр. «(2)». По возможности уравнения будут даваться в одинаковой форме в переводах на все языки. Поэтому желательно использовать в уравнениях только международные знаки и избегать также сокращений слов, которые понятны только в данном языке (напр. $E_{\text{пар}}$, $X_{\text{макс}}$ и т. д.). Следует использовать простые знаки с пояснением в тексте.

c) *Русинку и схемы.*

1) Каждый рисунок и схема должны даваться на отдельной странице и пронумерованы последовательно *арабскими цифрами*, напр., «Рис. 1».

2) Надписи ко всем рисункам и схемам должны быть даны на *отдельном листе* и соответственно пронумерованы.

3) Направлять фотоснимки следует только в случае крайней необходимости в них.

4) Желательно представлять чертежи, выполненные черной тушью на белой восковке.

5) На всех рисунках желательно использовать международные условные знаки. Определения этих знаков должны включаться в подрисуночные надписи. Это облегчит перевод материалов.

d) *Сноски* должны быть пронумерованы *арабскими цифрами* последовательно и указываться в тексте. Затем все сноски должны быть даны на отдельном листе.

e) *Наименования справочной литературы* должны быть пронумерованы *арабскими цифрами* в квадратных скобках. Полные наименования всех использованных изданий должны быть приведены в очередном порядке на отдельной странице по следующему образцу.
«[1] ЧЕХОВ, К., *Атомная энергия* **14** (1959) 137» или «[2] ИВАНОВ, Ф., *Физика плазмы* (АН СССР, 1956)».

f) *Таблицы* должны быть пронумерованы последовательно *римскими цифрами.* Надписи к таблицам должны быть перечислены на отдельном листе. По возможности в таблицах следует использовать международные условные знаки, значения которых должны быть даны в тексте надписей к таблицам. Размеры должны также даваться в тексте надписей к таблицам.

g) К рукописи каждой статьи должна быть приложена краткая аннотация (примерно 300 слов). Аннотация будут переводиться на рабочие языки Агентства и включаться в журнал.

Примечание:

Все рисунки, схемы, таблицы, листы со сносками к тексту и справочной литературой необходимо представлять в трех экземплярах.

При представлении рукописи автор должен указать, кому и по какому адресу должны быть направлены гранки статьи. Бланки на заказ дополнительного количества экземпляров будут направляться одновременно с гранками.
В случае принятия рукописи автору будет бесплатно направляться 50 оттисков. Дополнительные оттиски *следует заказывать* при возвращении в Асентство гранок статьи.

INSTRUCCIONES PARA LOS COLABORADORES

La correspondencia debe dirigirse al «Redactor de la revista FUSION NUCLEAR, Organismo Internacional de Energía Atómica, Viena I, Austria».

Presentación de los Originales

Al preparar los originales deberán tenerse en cuenta las siguientes normas:

a) *Texto de los artículos:* Los artículos podrán redactarse en español, francés, inglés o ruso, El texto, con dos copias, se enviará mecanografiado a *doble* o *triple espacio*, con *amplio margen* y en papel de buena calidad.

b) Todas las *ecuaciones* se numerarán con *números arábigos* colocados entre *paréntesis* a la derecha de cada ecuación. En la medida de lo posible, las ecuaciones se reproducirán exactamente en todas las traducciones; por ello, conviene emplear los símbolos reconocidos internacionalmente y evitar el uso de abreviaturas que sólo tengan sentido en un determinado idioma (por ejemplo, V_{med}, t_{max}, etc.). Deberán utilizarse símbolos simples cuyo significado se definirá en el texto.

c) *Figuras:*

1) Las figuras se presentarán en *hojas aparte* y se numerarán con *números arábigos;* por ejemplo: «Fig. 1».

2) Los textos que acompañen a las figuras se agruparán en una *hoja aparte* con la numeración correspondiente.

3) Sólo se enviarán fotografías cuando sea indispensable.

4) Se recomienda que las figuras se hagan en dibujo lineal, utilizando en lo posible tinta negra y papel de dibujo blanco.

5) Para facilitar el trabajo de traducción conviene que en las figuras sólo se empleen símbolos reconocidos internacionalmente; estos símbolos se definirán en el texto que vaya al pie de la figura.

d) Las *notas de pie de página* se indicarán en el texto con *números arábigos* y se agruparán en una hoja aparte.

e) Las *fuentes bibliográficas* se indicarán en el texto con *números arábigos* colocados entre *corchetes*, y se agruparán en una *hoja aparte* en orden numérico. Las menciones se harán de conformidad con los siguientes ejemplos: «[1] GRANADOS, A. J., *Rev. esp. Fís.* **17** (1958) 483» o «[2] JONES, L. M., Plasma Physics (XYZ Book Co., New York, 1957) 59».

f) Los *cuadros* se numerarán con *números romanos* y los textos explicativos se agruparán en una *hoja aparte.* Siempre que sea posible se utilizarán en las columnas símbolos aceptados internacionalmente, dando su significado en los textos explicativos.

g) Junto con el original se enviará un *resumen* (de unas 300 palabras). El resumen se publicará en la revista en los cuatro idiomas de trabajo del Organismo.

Nota:

Deberán enviarse un original y dos copias de las figuras y de los cuadros, así como de las hojas separadas que contengan las notas de pie de página y las fuentes bibliográficas. Al enviar el original se indicará el nombre y la dirección exacta de la persona a la que deberán remitirse las pruebas de imprenta. Con las pruebas se remitirá un formulario para encargar las separatas.

Los autores de los artículos publicados en la revista recibirán gratuitamente 50 separatas. Si desean recibir una cantidad mayor *habrán de* indicarlo al devolver las pruebas de imprenta.

INTERNATIONAL
ATOMIC ENERGY AGENCY,
VIENNA 1961

Price, single issue: US \$3; 21*s*.0*d*.stg; Sch 75
Annual subscription price (4 issues):
US \$10; 70*s*.0*d*.stg; Sch 250